Gratis hjælp
til matematik
lokalt og digitalt

Materialesamling til **Matematik A** fra Webmatematik.dk

www.matematikcenter.dk
www.webmatematik.dk
www.webmatlive.dk

Version: December, 2024

Materialesamling til A-niveau

Matematikcenter

Version: December, 2024

Indhold

1 Vektorer i 3D

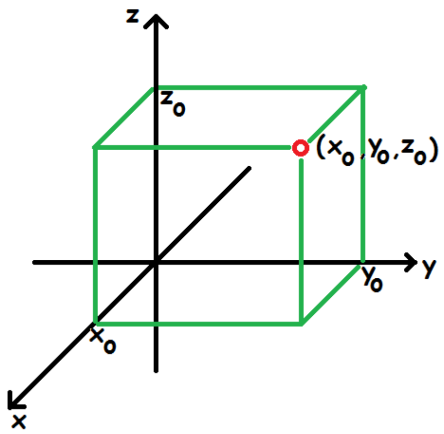
1.1 Koordinatsystemet i 3D

I rumgeometrien arbejder man med tredimensionelle koordinatsystemer. Hvor man i to dimensioner kun har to akser (x og y), har man i tre dimensioner tilføjet en ekstra akse, z-aksen.

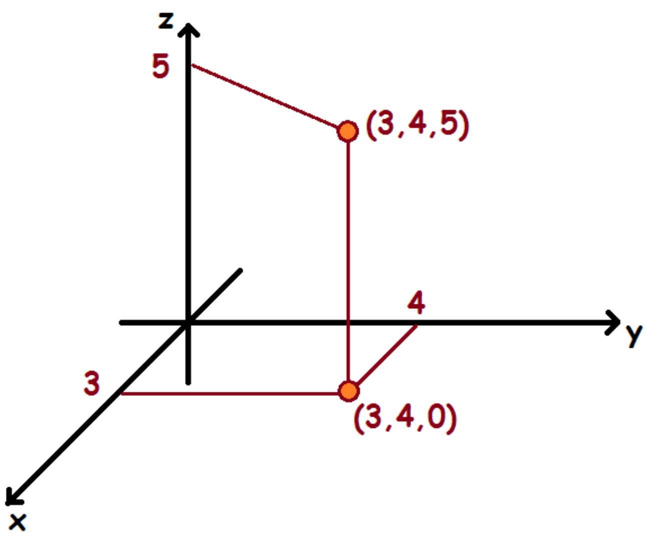
Man kan sammenligne det med et værelse. I to dimensioner har vi en plantegning, hvor vi ser værelset oppefra. Vi kan se hvordan møblerne står på gulvet i forhold til hinanden. Men vi kan ikke se, hvor høje de er. I tre dimensioner har vi tilføjet højden, så vi udover at se, hvordan møblerne er placeret i forhold til hinanden også skelner mellem øverste og nederste hylde i reolen.

Man tegner typisk akserne, så x-aksen peger udad, y-aksen henad og z-aksen opad.

Man aflæser et punkts koordinater ved først at gå ud af x-aksen, indtil man er nået på linje med punktets x-værdi. Derefter går man parallelt med y-aksen, indtil man er nået på linje med punktet, og til sidst går man op parallelt med z-aksen, indtil man når på linje med punktet.



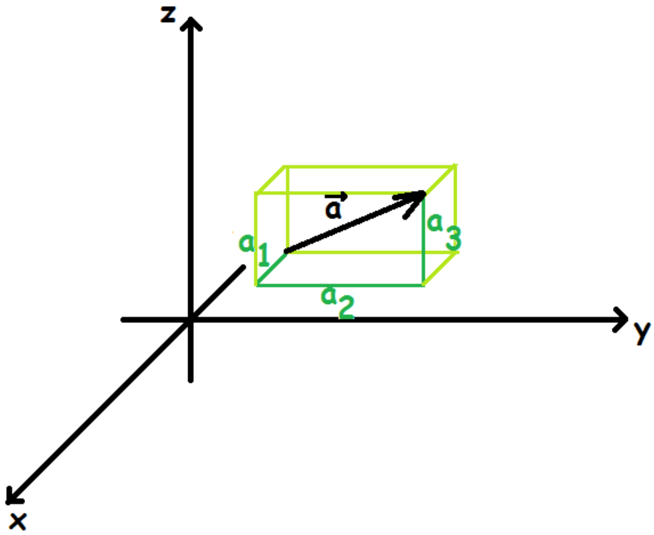
Hvis man skal afsætte et punkt i et tredimensionelt koordinatsystem, finder man punktet i xy-planen med de rigtige x- og y-værdier. Dette punkt har koordinaterne (x, y, 0). Herfra går man lodret op (eller ned) til man når den rigtige z-værdi. Herunder er punktet (3, 4, 5) indtegnet.



1.2 Vektorer i 3D

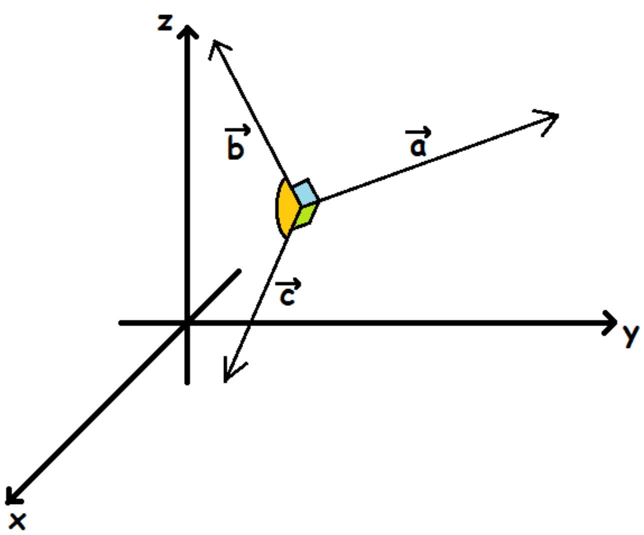
Præcis som i 2D er en 3D-vektor en pil med en retning og en længde.

I 3D har en vektor tre koordinater, der svarer til vektorens længde (regnet med fortegn) i hver af de tre aksers retninger. Første koordinaten svarer altså til, hvor langt man går langs x-aksen, andenkoordinaten hvor langt man går langs y-aksen, og tredjekoordinaten langs z-aksen.



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

De fleste begreber om vektorer fra 2D kan overføres direkte til 3D. Imidlertid gælder det ikke for tværvektor-begrebet. I rummet kan man nemlig ikke tale om at rotere en vektor 90^{o} mod uret, da "mod uret"afhænger af, hvor man ser fra. Der vil således være uendeligt mange måder at konstruere en vektor på, der står vinkelret på en bestemt vektor. Herunder er tegnet to vektorer, b og c, der begge står vinkelret på vektor a (men som ikke er vinkelrette på hinanden)



Udover tværvektorbegrebet, overfører vi heller ikke determinanten til 3D. Dette skyldes, at determinanten er defineret ud fra tværvektorer. Men ellers overføres alle de andre begreber. Nulvektoren i 3D er således

$$\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En stedvektor har samme koordinater, som det punkt, den fører hen til. Man kan konstruere en vektor mellem to punkter ved at trække deres koordinater fra hinanden

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

1.3 Addition, subtraktion og prikprodukt

Man regner med vektorer i 3D på nogenlunde samme måde som i 2D. Vi definerer således regneoperationerne som

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \\ t \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Med ord siger vi, at vi lægger to vektorer sammen (eller trækker dem fra hinanden) ved at lægge sammen (eller trække fra) koordinatvist, og at vi forlænger/forkorter en vektor ved at gange med skaleringsfaktoren på hver koordinat.

Skalarproduktet/prikproduktet i 3D er også defineret på samme måde som i 2D ved at vi ganger sammen koordinatvist og lægger produkterne sammen.

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Der gælder stadig, at to vektorer er ortogonale (vinkelrette på hinanden) hvis deres skalarprodukt er 0.

Regnereglerne minder meget om dem for vektorer i 2D. I videoen herunder kan du se nogle eksempler på udregninger af vektorsummer, -differenser og skalarprodukter i 2D.

1.4 Længde af vektor

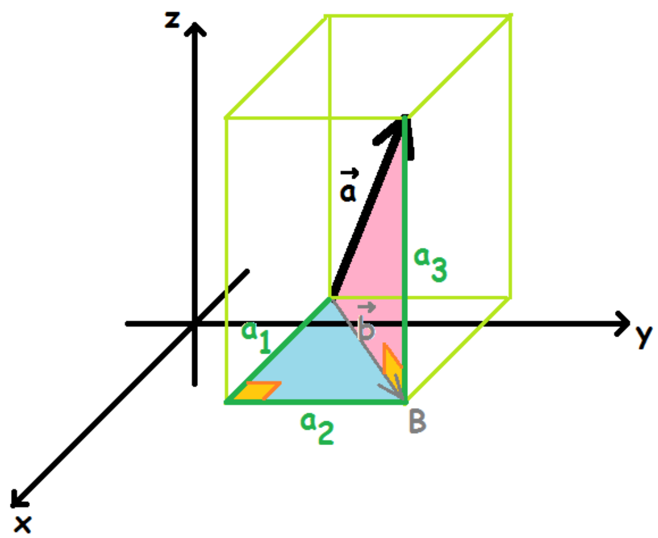
Når vi skal beregne længden af en vektor i 3D, bruger vi en formel der minder meget om 2D-formlen

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Som et eksempel kan vi udregne længden af vektoren med koordinaterne 2, 4 og 6.

$$\left|\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+4^2+6^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} \approx 7,48$$

Hvis vi skal forklare, hvorfor formlen ser sådan ud, skal vi holde tungen lige i munden og gøre brug af Pythagoras to gange.



Fra slutpunktet af vektor a går vi lodret ned indtil vi når ned i samme højde som startpunktet. Dette punkt kalder vi B. Vi tegner vektoren b mellem startpunktet for vektor a og punktet B.

Nu kan vi se, at vektor a udgør hypotenusen i en retvinklet trekant (lyserød) med vektor b som den ene katete, og a_3 som den anden. Altså kan vi udregne længden af vektor a, hvis vi bare kender længden af vektor b.

Vektor b udgør imidlertid hypotenusen i en anden retvinklet trekant (lyseblå) med kateterne a_1 og a_2. Derfor kan vi udregne længden af vektor b vha. Pythagoras.

$$|\overrightarrow{b}|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2$$
$$|\overrightarrow{b}|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

Grunden til at vi brugte numeriske tegn om a_1 og a_2 var, at vi skulle bruge længderne af kateterne, og vi ikke vidste om koordinaterne var positive eller negative. Når vi sætter i anden, får vi imidlertid altid et positivt tal, hvorved vi kan ophæve de numeriske tegn.

Nu kan vi bruge Pythagoras til at udregne længden af vektor a

$$\overrightarrow{a}|^2 = |\overrightarrow{b}|^2 + |a_3|^2$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + |a_3|^2$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

1.5 Krydsprodukt

Når man har med 3D-vektorer at gøre, findes der en ny regneart. Den kaldes *krydsproduktet* eller *vektorproduktet*. Man krydser to vektorer med hinanden på følgende måde

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at når man krydser to vektorer med hinanden, så får man en ny vektor.

Huskeregel

Der findes en måde, så det er lettere at huske, hvordan man udregner krydsproduktet.

Når man skal finde førstekoordinatet i krydsproduktsvektoren, så holder man en hånd over de to førstekoordinater og udregner determinanten af det tiloversblevne.

Når man skal udregne andenkoordinatet, holder man for de to andenkoordinater og udregner determinanten af det tiloversblevne. Når man har gjort det skal man huske at sætte et minus foran!

Når man skal udregne tredjekoordinatet i krydsproduktsvektoren holder man for tredjekoordinaterne og tager determinanten af det synlige.

Vi illustrerer huskereglen ved et eksempel.

Vi ønsker at udregne krydsproduktet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi holder en hånd over førstekoordinaterne og finder determinanten af de fire tal, der er synlige

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 12 - 15 = -3$$

førstekoordinatet er altså -3

Nu holder vi for andenkoordinaterne og finder determinanten af de fire synlige tal

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = -6$$

Ved andenkoordinatet skal man huske at sætte minus foran! Så andenkoordinatet bliver altså 6

Til sidst holder vi en hånd over tredjekoordinaterne og udregner determinanten af de fire synlige tal

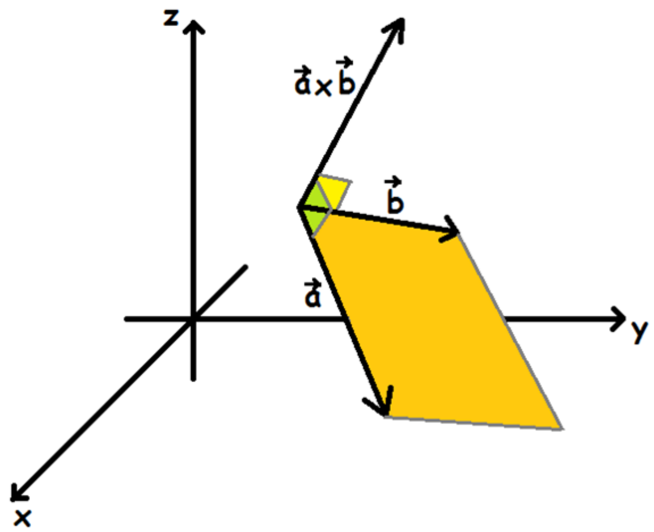
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 5 - 8 = -3$$

Krydsproduktet giver altså

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Egenskaber ved krydsproduktet

Når man finder krydsproduktet af to vektorer, vil krydsproduktsvektoren stå vinkelret på begge de to oprindelige vektorer.



Vi kan tjekke, at det er rigtigt i eksemplet ovenfor ved at prikke hver af vektorerne sammen med krydsproduktsvektoren

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

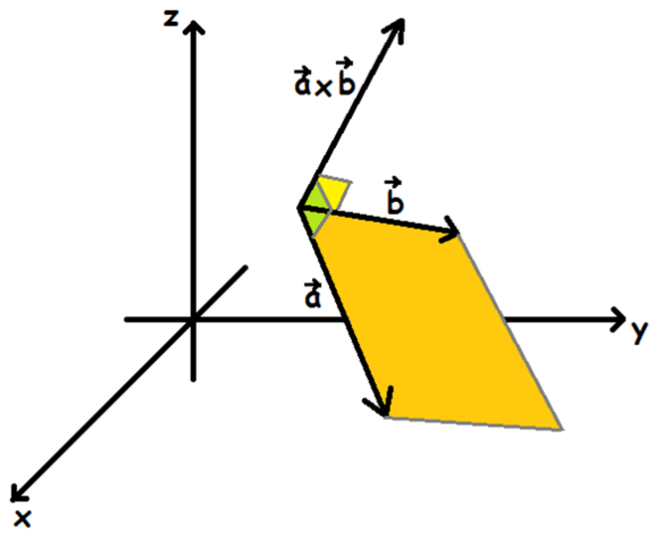
$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 6 + 6 \cdot (-3) = -12 + 30 - 18 = 0$$

Da begge prikprodukter giver 0, betyder det at hver af vektorerne er ortogonale med krydsproduktet.

Areal af parallellogram

Udover at stå vinkelret på begge vektorer, så er længden af krydsproduktet lig med arealet af det parallellogram, der udspændes af de to vektorer.

$$A_{parallellogram} = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$$



F.eks. kan arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

udregnes som:

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}\right| &= \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2}\\ &= \sqrt{9+36+9} \;= \sqrt{54}\\ &\approx 7,35\end{aligned}$$

Parallelle vektorer

Hvis krydsproduktet af to vektorer giver nulvektoren, betyder det, at de to vektorer er parallelle.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \ .$$

Dette skyldes, at længden af krydsproduktet mellem to vektorer kan skrives som

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(v) \ ,$$

hvor v er den udspændte vinkel mellem de to vektorer. Da $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ betyder det altså, at hvis de to vektorer er enten ensrettede eller modsatrettede parallelle, så er længden af deres krydsprodukt nul. Da længden af krydsproduktet er givet som kvadratroden af en sum af positive størrelser medfører det altså at hvis længden er nul, må krydsproduktet nødvendigvis også være det.

1.6 Linjer i rummet

Når man arbejder med linjer i rummet, bruger man stort set kun deres parameterfremstilling. I princippet kan man også opskrive en ligning for linjer i rummet, men det er en grim formel, som er svær at anvende i praksis.

Parameterfremstillingen for linjen er stort set som i 2D bare med et tredje koordinat på retningsvektoren og det faste punkt.

Et punkt (x, y, z) ligger således på en ret linje, hvis det opfylder ligningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Dette kan også skrives som

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{r}$$

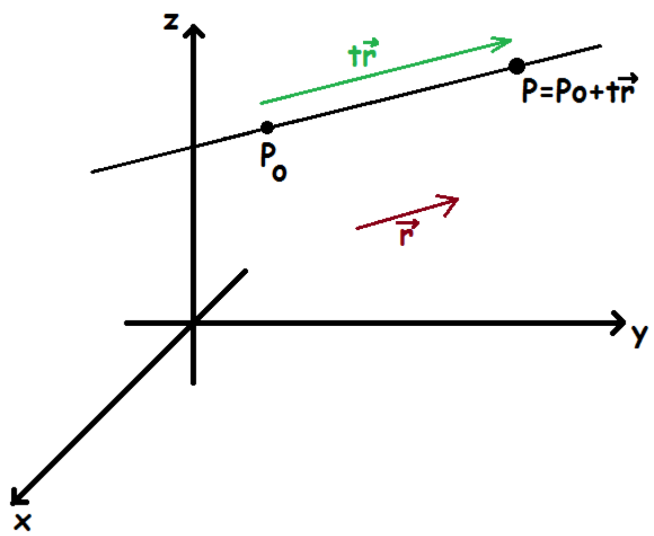
Man kan også skrive parameterfremstillingen som funktioner for hver koordinat:

$$x = x_0 + t \cdot r_1$$

$$y = y_0 + t \cdot r_2$$

$$z = z_0 + t \cdot r_3$$

Parameterfremstillingen for linjer i rummet fungerer på samme måde som i planen. Man starter i et punkt på linjen og derfra kan man nå alle punkter på linjen ved at gå en forlængelse/forkortelse af retningsvektoren ud fra punktet.



Et eksempel på en parameterfremstilling er

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Parameterfremstillingen beskriver en linje, der går gennem punktet (2, 3, 0) og har retningen

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.7 Vindskæve linjer

Hvis man har to linjer i rummet kan de ligge på tre forskellige måder i forhold til hinanden.

De kan

1. være parallelle
2. skære hinanden i et punkt
3. være vindskæve

Lad os se på de tre tilfælde hver for sig.

Parallelle

Man kan undersøge, om to linjer er parallelle ved at se om deres to retningsvektorer er parallelle.

Dette kan gøres på to måder. Enten kan man undersøge om den ene er en forlængelse af den anden.

F.eks. er

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

en forlængelse af

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

fordi man kan skrive

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Den anden metode til at tjekke for parallelitet er ved at undersøge om krydsproduktet giver 0. Hvis de to retningsvektorer betegnes med r og q gælder nemlig:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r} \parallel \vec{q}$$

Hvis linjerne er parallelle har de enten 0 skæringspunkter eller uendeligt mange skæringspunkter (dette sker, hvis de to linjer er ens)

Ét skæringspunkt

Hvis linjerne ikke er parallelle, kan man undersøge, om de skærer hinanden i ét punkt. Det gør man ved først at sætte ligningerne for de to x- og y-koordinater lig hinanden. Det vil give to ligninger med to ubekendte (de to parametre), som vi kan løse.

Når vi så har fundet løsningerne, så sætter vi parametrene ind i ligningerne for z-koordinaterne og ser, om vi får samme z-koordinat. Hvis dette er tilfældet, har vi fundet et skæringspunkt. Og hvis vi ikke får samme z-koordinat, så skærer de to linjer ikke hinanden.

Vi prøver med et eksempel. Vores linjer l og m er givet ved

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi kan skrive ligningerne for x- og y-koordinaterne således:

$$x_l = 1 + 3t$$

$$y_l = 2 + 1 \cdot t$$

$$x_m = 5 + 2s$$

$$y_m = 1 + 4s$$

Vi sætter x-værdierne lig hinanden og y-værdierne lig hinanden

$$1 + 3t = 5 + 2s$$

$$2 + t = 1 + 4s$$

Vi løser de to ligninger med to ubekendte og når frem til

$$s = 0,7 \quad \text{og} \quad t = 1,8$$

Nu skal vi indsætte disse s- og t-værdier i ligningerne for z-værdierne.

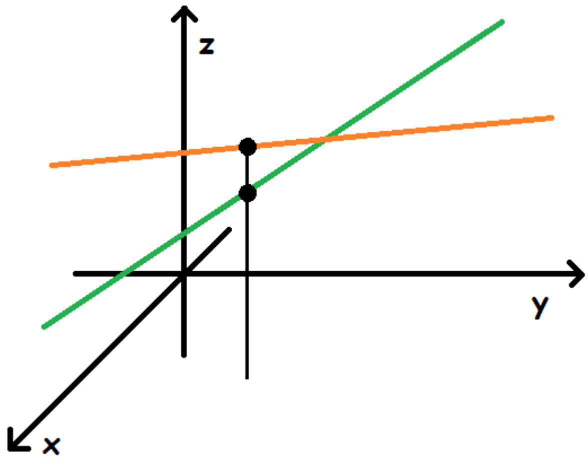
$$z_l = 4 + 2t = 4 + 2 \cdot 1,8 = 7,6$$

$$z_m = 3 + 2s = 3 + 2 \cdot 0,7 = 4,4$$

Da vi får to forskellige z-værdier, betyder det, at de to linjer ikke skærer hinanden.

Vindskæve linjer

Hvis to linjer hverken er parallelle eller skærer hinanden, så kaldes de "vindskæve". På billedet herunder har vi forsøgt at afbilde to vindskæve linjer. Deres retningsvektorer er ikke parallelle, og i det punkt, hvor de har samme x- og y-værdier (de to sorte punkter), er deres z-værdier forskellige.



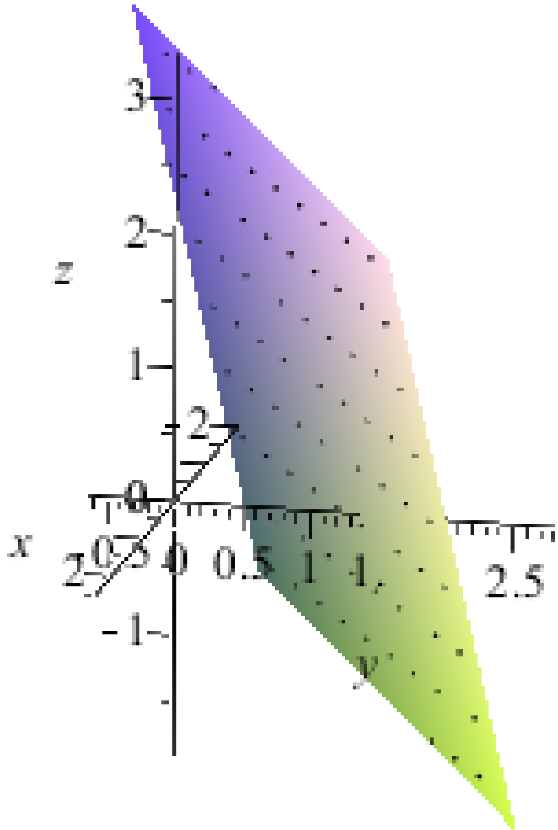
Det ligner, de skærer hinanden et sted, men det er fordi, det er svært at tegne tredimensionelt i to dimensioner. I det tilsyneladende skæringspunkt er den grønne linje "længere inde i skærmen", mens den orange er tættere på os.

Man kan forestille sig to vindskæve linjer som en bil, der kører ad en lige vej nede på jorden (den ene linje) og et fly, der flyver ligeud oppe i luften (den anden linje). Selvom flyet krydser henover vejen, så vil bilen og flyet ikke støde sammen, da flyet befinder sig flere km over vejen.

1.8 Planer

Et plan er en to-dimensional størrelse i et tredimensionelt rum. Man kan forestille sig et plan som et stykke papir, der befinder sig i et tredimensionelt rum, og som breder sig uendeligt ud. Ligesom du kan hæve eller sænke et stykke papir eller rotere det, således at det vender på alle mulige skæve måder, så kan du også gøre det med et plan.

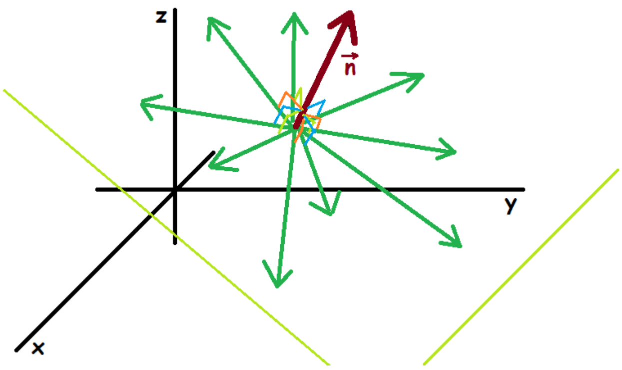
Nedenfor er tegnet et plan.



Normalvektor

Ligesom vi i 2D snakkede om at linjer havde normalvektorer, snakker vi i 3D om at planer har normalvektorer. Man kan faktisk definere et plan som alle de vektorer, der står vinkelret på en (normal)vektor.

Herunder har vi tegnet en rød vektor og 9 grønne vektorer, der alle står vinkelret på den. Det ses, at de grønne vektorer ligger i den samme plan.



Man betegner tit planer med græske bogstaver såsom α og β

1.9 Planens ligning

Man kan beskrive et plan ved hjælp af en ligning. Planens ligning er

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Her er (x_0, y_0, z_0) et punkt i planen og

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

er en normalvektor til planen.

Man kan også skrive ligningen om til

$$ax + by + cz + d = 0$$

hvor man har ganget parenteserne ud og samlet alle konstanterne i én, nemlig d.

At planen har denne ligning, betyder, at planen består af alle de punkter (x,y,z), der opfylder ligningen. Dvs. alle de punkter (x,y,z), der gør, at der står det samme på venstre og højre side af lighedstegnet.

Man kan afgøre om et punkt ligger i et plan ved at indsætte dets koordinater i ligningen, og se om man får 0 ud af det. F.eks. kunne man ønske at finde ud af om (2, 4, 5) ligger i planen med ligningen 3x+5y-2z+7=0.

Vi sætter ind

$$3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 7 = 6 + 20 - 10 + 7 = 23 \neq 0$$

Da punktet ikke opfylder ligningen, ligger det ikke i planen.

Finde ligningen for planen, hvis man kender to vektorer

Hvis man tegner to ikke-parallelle vektorer (fra samme begyndelsespunkt), vil de udspænde et plan. Det vil sige, at man kan finde én (og kun én) plan, som de begge to ligger i. Det er let at opskrive en ligning for det plan. Alt vi skal kende er et punkt i planen og en normalvektor til planen.

Som punkt kan vi bruge begyndelsespunktet for vektorerne. Som normalvektor kan vi bruge krydsproduktet af de to vektorer, fordi krydsproduktet står vinkelret på begge vektorer.

Hvorfor ser ligningen sådan ud?

Lad os prøve at se på, hvorfor planens ligning ser ud som den gør. Vi ved, at normalvektoren står vinkelret på alle vektorer i planen. Hvis punktet P(x,y,z) ligger i planen, så må vektoren

$$\overrightarrow{P_0P}$$

også ligge i planen, fordi den er en vektor mellem to punkter i planen.

Det betyder, at den er vinkelret på normalvektoren

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$$

Og det betyder så igen, at deres prikprodukt er 0.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Vi skriver de to vektorer ud med koordinater

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

Nu prikker vi vektorerne sammen, og får

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

hvilket er planens ligning.

1.10 Planens parameterfremstilling

Ligesom linjen har en parameterfremstilling, så kan man også lave en parameterfremstilling for planen. Det kræver, at man kender ét punkt i planen og to ikke-parallelle vektorer, der ligger i planen.

Parameterfremstillingen for planen ser således ud:

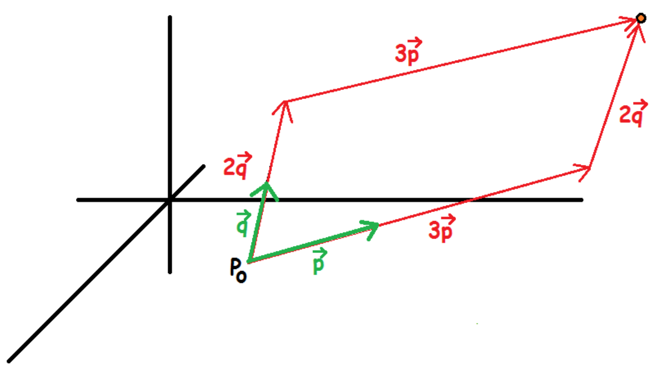
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

eller skrevet kortere

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + s \cdot \vec{p} + t \cdot \vec{q}$$

Vektorerne p og q kaldes retningsvektorer for planen.

Planens parameterfremstilling fungerer på den måde, at man kan nå ud til alle punkter i planen ved at starte i P_0 og derfra gå først et stykke parallelt med den ene vektor og dernæst et stykke parallelt med den anden. Nedenfor er tegnet, hvor man går 3 af den ene vektor og 2 af den anden ud fra punktet for at nå frem til det orange punkt.



Ved at sætte forskellige tal ind på s's og t's plads kan man nå ud til alle punkter i planen.

Finde ligning når man kender parameterfremstilling

Hvis man kender parameterfremstillingen for et plan, kan man let finde dens ligning. Man finder normalvektoren ved at krydse de to retningsvektorer med hinanden

$$\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q}$$

og man kender allerede et punkt i planen. Så kender man alt, hvad man har brug for for at kunne opskrive en ligning for planen

Finde parameterfremstilling, hvis man kender ligning

Hvis man kender ligningen for et plan, kan man gå den anden vej og finde en parameterfremstilling for planen.

Vi illustrerer metoden med et eksempel.

$$\alpha : \quad 2x + 4y - 6z - 1 = 0$$

Først isolerer man den ene variable. Man bestemmer selv hvilken. Vi vælger at isolere x.

$$x = \frac{1}{2} - 2y + 3z$$

Nu lader man de to andre variable være parametrene. Vi sætter y=s og z=t. Dermed har vi de tre ligninger

$$x = \frac{1}{2} - 2s + 3t$$

$$y = s$$

$$z = t$$

Vi kan også skrive det som

$$x = \frac{1}{2} - 2 \cdot s + 3 \cdot t$$

$$y = 0 + 1 \cdot s + 0 \cdot t$$

$$z = 0 + 0 \cdot s + 1 \cdot t$$

og dette kan på vektorform skrives som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvorved vi er nået frem til en parameterfremstilling for planen.

1.11 Vinkel mellem linje og plan

Hvis man har en linje og et plan, vil de skære hinanden i et punkt (medmindre de er parallelle), og der vil dannes en vinkel imellem dem.

Denne vinkel kan vi beregne.

Først finder man vinklen mellem planens normalvektor og linjens retningsvektor.

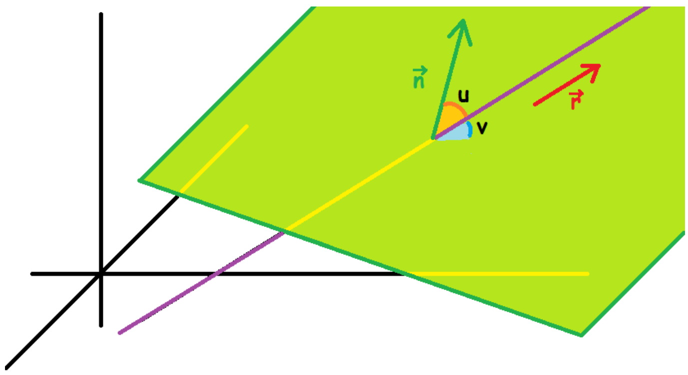
Dette gør man med den formel, vi kender fra 2D

$$\cos(u) = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{r}|}$$

Hvis vi trækker denne vinkel fra 90º får vi vinklen mellem linjen og planen

$$v = 90^\circ - u$$

Det kan illustreres med følgende tegning



Der findes et lille trick man kan bruge, for at spare lidt tid. Sinus og cosinus er komplimentære funktioner, derfor gælder følgende

$$\sin(\theta) = \cos(90^\circ - \theta)$$

Vi viste før hvordan vi fandt vinklen v, nemlig ved at trække vinklen u fra 90 grader, hvilket minder meget om ovenstående ligning. Derfor kan man gøre følgende

$$\sin(v) = \cos(u) = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{r}|}$$

Man kan med fordel bruge sinus, og dermed spare sig selv en beregning, men det er ikke forkert at bruge cosinus og derefter bestemme v, som det er vist ovenfor.

1.12 Vinkel mellem to planer

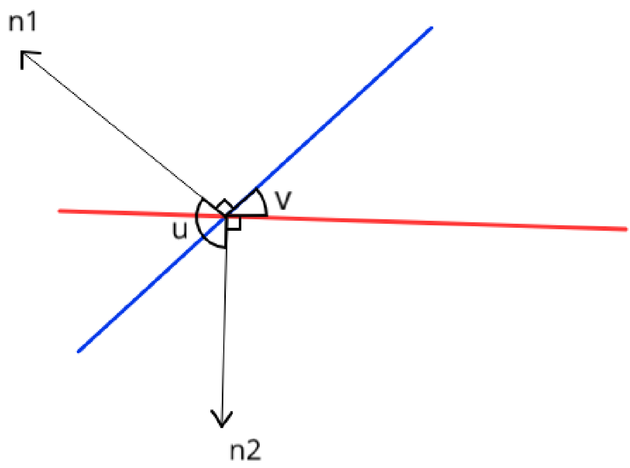
Hvis man har to planer α og β, kan man beregne vinklen mellem dem.

Man starter med at finde vinklen mellem de to planers normalvektorer. Dette gør man med den formel, vi kender fra 2D.

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|}$$

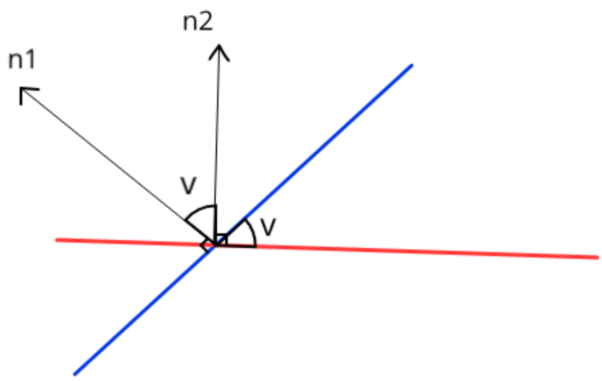
Vinklen mellem normalvektorerne danner dog to vinkler, en stump og en spids, alt efter hvordan man definerer sine normalvektorer. Hvis vinklen v er vinklen mellem planerne, så vil vinklen mellem normalvektorerne i det spidsvinklede tilfælde også være v. I det stumpvinklede tilfælde vil vinklen mellem normalvektorerne være u, hvoraf vinklen mellem planerne, v, findes ved $v = 180° - u$.

Man kan illustrere det stumpvinklede tilfælde ved hjælp af følgende tegning. Tegningen er kun 2D, men man kan forestille sig, at det er tværsnittet af to planer i rummet.



Her ses den stumpe vinkel, u, mellem de to normalvektorer, n1 og n2. Man finder vinklen mellem de to planer, rød og blå linje, ved $180° - u$.

Det spidsvinklede tilfælde kan ses nedenfor. Her ses det, at den spidse vinkel mellem de to normalvektorer er lig vinklen mellem planerne.



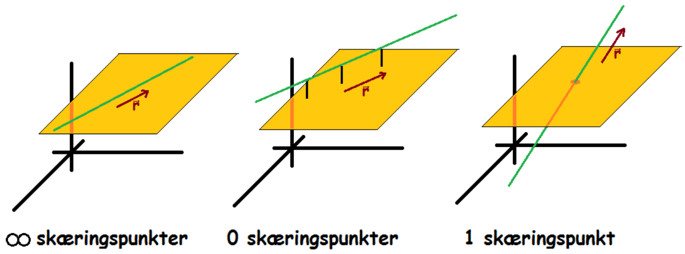
1.13 Skæring mellem linje og plan

Når man skal se, hvordan linjer og planer forholder sig i forhold til hinanden, er der tre muligheder.

• Hvis linjen ligger i planen (dvs. at både retningsvektoren og det faste punkt ligger i planen), er der uendeligt mange skæringspunkter.

• Hvis linjens retningsvektor ligger i planen, men det faste punkt ikke gør, så er der *ingen* skæringer.

- Hvis linjens retningsvektor ikke ligger i planen, er der ét skæringspunkt.



Man kan undersøge om retningsvektoren ligger i planen ved at prikke den med planens normalvektor. Hvis prikproduktet giver 0, er de to vektorer ortogonale og det vil sige, at retningsvektoren ligger i planen (hvis planen er givet ved en parameterfremstilling og ikke en ligning, kan man finde normalvektoren ved at krydse planens to retningsvektorer med hinanden)

Hvis retningsvektoren ligger i planen, kan man undersøge om linjens faste punkt også ligger i planen. Det gør man ved at indsætte punktet i planens ligning og se, om den er opfyldt. (Hvis planen er givet ved en parameterfremstilling, sætter man punktet ind på venstre side og bruger to af de tre ligninger til at isolere s og t. Dernæst indsætter man s- og t-værdierne i den tredje for at undersøge om den er opfyldt).

Hvis retningsvektoren ikke ligger i planen, kan man beregne skæringspunktets koordinater.

Find skæring, når plan er givet ved ligning

Hvis planen er givet ved en ligning og linjen ved parameterfremstilling, så finder man skæringen mellem dem på følgende måde:

Først indsætter man hver enkelt koordinatfunktion fra linjen i planens ligning. Dernæst isolerer man t. Den fundne t-værdi indsættes slutteligt i linjens parameterfremstilling, og det punkt, man når frem til er skæringspunktet.

Lad os tage et eksempel:

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha: \quad 2x + 3y - z + 4 = 0$$

Vi kan skrive linjens parameterfremstilling om til de tre koordinatfunktioner

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 5 - 2t$$

$$z = 0 + t = t$$

Disse funktioner sætter vi så ind på x's, y's og z's pladser i planens ligning

$$2(1 + 2t) + 3(5 - 2t) - (0 + t) + 4 = 0$$

$$2 + 4t + 15 - 6t - t + 4 = 0$$

$$-3t + 21 = 0$$

$$t = \frac{21}{3} = 7$$

Vi har altså fundet ud af, at linje og plan skærer hinanden, når t=7. Nu mangler vi bare at indsætte t=7 i linjens parameterfremstilling for at finde frem til skæringspunktet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 7 \cdot 2 \\ 5 - 7 \cdot 2 \\ 0 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Skæringspunktet er derfor (15, -9, 7)

Find skæring, når plan er givet ved parameterfremstilling

Hvis planen er givet ved en parameterfremstilling, kan man enten omskrive parameterfremstilingen til en ligning og gøre som ovenfor, eller man kan løse tre ligninger med tre ubekendte.

Lad os tage et eksempel

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x = 2u \\ y = -u \\ z = 1 + u \end{matrix}$$

$$\alpha: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x = 1 + s + 3t \\ y = 1 + 2s \ (+0 \cdot t) \\ z = 2 + t \ (+0 \cdot s) \end{matrix}$$

Bemærk, at vi har givet alle parametrene forskellige navne, således at linjens parameter hedder u, mens planens hedder s og t.

Nu sætter vi ligningerne for x lig hinanden, ligningerne for y lig hinanden og ligningerne for z lig hinanden.

$$2u = 1 + s + 3t$$

$$-u = 1 + 2s$$

$$1 + u = 2 + t$$

Vi starter med at isolere en af parametrene i en af ligningerne. Lad os isolere u i den tredje ligning

$$u = 2 + t - 1 = 1 + t$$

Dette sætter vi nu ind på u's plads i de andre ligninger

$$2(1 + t) = 1 + s + 3t$$

$$-(1 + t) = 1 + 2s$$

Nu står vi med to ligninger med to ubekendte. Vi isolerer s i den øverste

$$s = 2(1 + t) - 1 - 3t = 2 + 2t - 1 - 3t = 1 - t$$

Dette sætter vi nu ind på s's plads i den anden ligning

$$-(1+t) = 1 + 2(1-t)$$

$$-1 - t = 1 + 2 - 2t$$

$$-t + 2t = 1 + 2 + 1$$

$$t = 4$$

Nu ved vi at t=4, og vi kan indsætte dette i udtrykkene for u og s

$$u = 1 + t = 1 + 4 = 5$$

$$s = 1 - t = 1 - 4 = -3$$

Nu indsætter vi enten u-værdien i linjens parameterfremstilling eller s- og t-værdierne i planens parameterfremstilling. Lige meget i hvilken vi indsætter, når vi frem til skæringspunktet. Vi indsætter u=5 i linjens parameterfremstilling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 5 \cdot 2 \\ 0 + 5 \cdot (-1) \\ 1 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Altså skærer linjen planen i punktet (10, -5, 6).

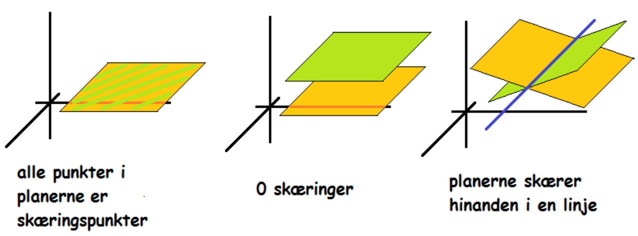
1.14 Skæring mellem planer

Hvis man har to planer, kan de ligge på tre forskellige måder i forhold til hinanden.

• Hvis de to planer er ens (deres normalvektorer er parallelle, og de har et fælles punkt), så skærer de hinanden over hele planen.

• Hvis de to planer er parallelle (deres normalvektorer er parallelle, men de har ingen fælles punkter), så skærer de to planer ikke hinanden.

• Hvis de to planers normalvektorer ikke er parallelle, vil planerne skære hinanden i en linje.



Man starter med at undersøge om planerne er parallelle. Det gør man ved at undersøge om deres normalvektorer er parallelle. Man krydser de to normalvektorer med hinanden. Hvis krydsproduktet giver nulvektoren, er de parallelle. (Hvis den ene (eller begge) planer er givet ved parameterfremstilling, finder man planens normalvektor ved at krydse dens to retningsvektorer med hinanden).

Hvis planerne er parallelle, undersøger man om de er sammenfaldende eller ej. Man undersøger om det faste punkt fra den ene plan ligger i den anden ved at indsætte i dens ligning. (Hvis en eller begge planer er givet ved parameterfremstilling kan man tage det faste punkt fra den ene og indsætte på venstresiden af den anden. Så løser man to af ligningerne med to ubekendte. De fundne parameterværdier indsættes så i den tredje ligning. Hvis den er opfyldt, ligger punktet i begge planer).

Hvis planerne ikke er parallelle, skærer de hinanden i en linje. Vi beviser først, at krydsproduktet af de to planers normalvektorer udgør en retningsvektor for skæringslinjen.

Bevis for skæringslinjens retningsvektor

Antag, at vi kender et punkt $P(x_0, y_0, z_0)$, som ligger på skæringslinjen mellem to planer med ligningerne hhv. $\alpha : a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z + k_\alpha = 0$ og $\beta : b_1 \cdot x + b_2 \cdot y + b_3 \cdot z + k_\beta = 0$.

En normalvektorer til hver af planerne er da:

$$\overrightarrow{n}_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{n}_\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

og krydsproduktet mellem normalvektorerne er en vektor, $\overrightarrow{r}$:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{n}_\alpha \times \overrightarrow{n}_\beta = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Vi betragter en linje l, som inkluderer punkt P og har $\overrightarrow{r}$ som retningsvektor. Denne linje kan beskrives ved parameterfremstillingen:

$l : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot \overrightarrow{r}$, hvor $-\infty < t < +\infty$

Vi indsætter nu parameterfremstillingen for linjen l i ligningerne for de to planer, idet vi i sidste linje af udregningerne for hver plan udnytter, at koordinatsættet til punkt P opfylder planens ligning:

Planen α:

$a_1 \cdot (x_0 + t \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)) + a_2 \cdot (y_0 + t \cdot (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)) + a_3 \cdot (z_0 + t \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)) + k_\alpha = (a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + k_\alpha) + t \cdot (a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1) = (a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + k_\alpha) + t \cdot 0 = 0$

Planen β:

$b_1 \cdot (x_0 + t \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)) + b_2 \cdot (y_0 + t \cdot (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)) + b_3 \cdot (z_0 + t \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)) + k_\beta = (b_1x_0 + b_2y_0 + b_3z_0 + k_\beta) + t \cdot (b_1a_2b_3 - b_1a_3b_2 + b_2a_3b_1 - b_2a_1b_3 + b_3a_1b_2 - b_3a_2b_1) = (b_1x_0 + b_2y_0 + b_3z_0 + k_\beta) + t \cdot 0 = 0$

Parameterfremstillingen for linjen l ses at opfylde begge planers ligning, og vi har hermed bevist, at vektoren $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{n}_\alpha \times \overrightarrow{n}_\beta$ er retningsvektor for skæringslinjen mellem de to planer.

Lad os herefter se på, hvordan vi i praksis bestemmer en parameterfremstilling for skæringslinjen.

Begge planer er givet ved ligninger

Hvis begge planer er givet ved ligninger, finder man skæringslinjen ved følgende fremgangsmåde. Først krydser man de to normalvektorer med hinanden. Deres krydsprodukt er retningsvektoren for skæringslinjen. Dernæst skal man finde et punkt på linjen. Det gør man ved at sætte et fast tal ind i stedet for en af de variable (typisk z=0) og løse de to ligninger med to ubekendte. Derved vil man opnå et punkt der ligger på skæringslinjen.

Nu kan man sammensætte det i en parameterfremstilling

Lad os illustrere med et eksempel.

$$\alpha : \quad x - 3y + z - 1 = 0$$

$$\beta : \quad 2x - 5y - 2z + 4 = 0$$

Vi aflæser normalvektorerne ud fra ligningerne

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Skæringslinjens retningsvektor er krydsproduktet af de to normalvektorer

$$\vec{r} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu sætter vi z=0 i de to ligninger

$$x - 3y + 0 - 1 = 0$$

$$2x - 5y - 2 \cdot 0 + 4 = 0$$

Vi løser de to ligninger med to ubekendte ved substitutionsmetoden

$$x - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3y + 1$$

$$2(3y + 1) - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow 6y + 2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = -6$$

$$x = 3 \cdot (-6) + 1 = -18 + 1 = -17$$

Nu har vi punktet (-17, -6, 0) som ligger på skæringslinjen.

Skæringslinjen har derfor parameterfremstillingen

$$l : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et plan er givet ved ligningen, den anden ved parameterfremstilling

Hvis den ene plan er givet ved ligning og den anden ved parameterfremstilling, så finder man skæringslinjen på følgende måde.

Først indsætter man hver enkelt koordinatfunktion fra parameterfremstillingen i den anden plans ligning. Dernæst isolerer man den ene parameter. Dette indsætter man så igen i parameterfremstillingen, hvorved man kan reducere til linjens parameterfremstilling.

Lad os se på et eksempel:

$$\alpha : \quad 2x - y + 3z = 0$$

$$\beta : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi kan omskrive parameterfremstillingen til de tre koordinatfunktioner

$$x = 1 + 2s - t$$

$$y = 1 + 3t$$

$$z = s + 2t$$

Disse indsætter vi nu i ligningen og isolerer den ene parameter

$$2(1 + 2s - t) - (1 + 3t) + 3(s + 2t) = 0$$

$$2 + 4s - 2t - 1 - 3t + 3s + 6t = 0$$

$$1 + 7s + t = 0$$

$$t = -1 - 7s$$

Nu indsætter vi dette på t's plads i de tre koordinatfunktioner

$$x = 1 + 2s - (-1 - 7s) = 1 + 2s + 1 + 7s = 2 + 9s$$

$$y = 1 + 3(-1 - 7s) = 1 - 3 - 21s = -2 - 21s$$

$$z = s + 2(-1 - 7s) = s - 2 - 14s = -2 - 13s$$

Vi kan nu skrive det om til en parameterfremstilling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -21 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Begge planer er givet ved parameterfremstillinger

Hvis begge planer er givet ved parameterfremstillinger vil vi anbefale, at man omskriver den ene til en ligning (man kender allerede et fast punkt, og som normalvektor kan man bruge krydsproduktet af de to retningsvektorer. Læs evt. mere her). Nu har man den ene plan som ligning og den anden som parameterfremstilling, og man kan således bruge metoden ovenfor.

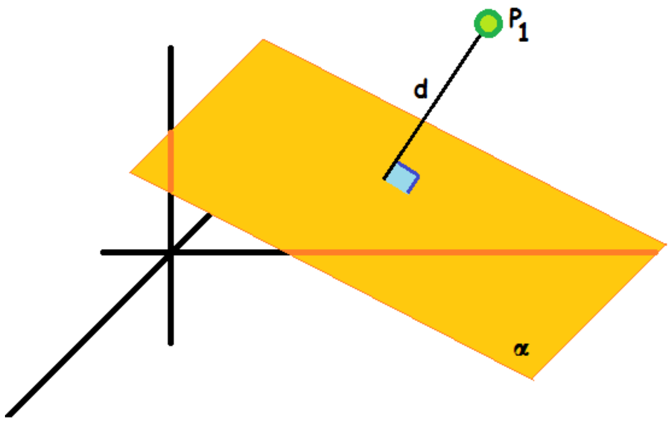
Der findes også en metode, hvor man ikke behøver omskrive til ligning, men den er relativt indviklet, så den vil vi forbigå her.

1.15 Afstand mellem punkt og plan

Hvis man har oplyst et punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ og et plan α: ax+by+cz+d=0, så er afstanden mellem dem givet ved formlen

$$\text{dist}(\alpha, P_1) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Den afstand, man måler, er den vinkelrette afstand mellem punktet og planen.



Læg mærke til, hvordan formlen minder om afstanden mellem en linje og et punkt i 2D.

Lad os se, hvordan formlen virker ved hjælp af et eksempel.

$$\alpha: \; 2x + y - 2z - 14 = 0$$

$$P_1(-1, -1, 2)$$

Altså er a=2, b=1, c= -2, d= -14, x_1= -1, y_1= -1, og z_1=2.

Nu sætter vi ind i formlen

$$\text{dist}(\alpha, P_1) = \frac{|2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (2) - 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2-1-4-14|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$= \frac{|-21|}{\sqrt{9}} = \frac{21}{3} = 7$$

Altså er den korteste (den vinkelrette) afstand mellem punktet og planen 7 længdeenheder.

Hvis man får afstanden mellem et punkt og et plan til at være 0, så betyder det, at punktet ligger i planen.

Hvad hvis planen er givet ved parameterfremstilling?

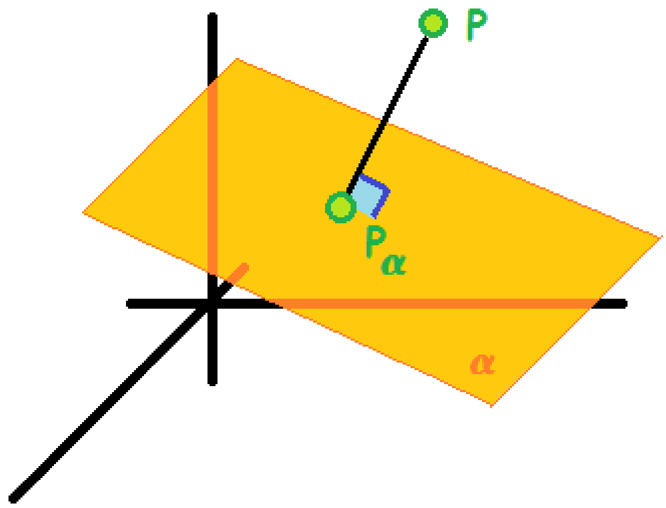
Hvis planen er givet ved parameterfremstilling, omregner man den til en ligning.

Man kender allerede et fast punkt, og man kan udregne en normalvektor ved at krydse de to retningsvektorer med hinanden.

Når man har omregnet planen fra parameterfremstilling til ligning, kan man bruge formlen ovenfor.

1.16 Projektion af punkt på plan

Hvis man har et punkt og et plan, kan man ønske at projicere punktet ned på planen. Projektionen svarer til det punkt i planen, man rammer, hvis man bevæger sig vinkelret fra punktet ind mod planen.

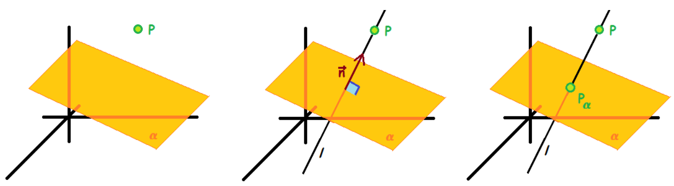


Hvordan finder man projektionen

Når man ønsker at finde koordinatsættet for projektionen af et punkt på et plan, gør man det i flere trin.

Først konstruerer man en linje, der står vinkelret på planen og som går gennem punktet.

Dernæst finder man skæringspunktet mellem planen og linjen. Skæringspunktet er projektionen.



Det er let at konstruere en linje gennem punktet som står vinkelret på planen. Man bruger planens normalvektor som retningsvektor for linjen (så sikrer man sig at linjen er vinkelret på planen) og man bruger punktet som det faste punkt på linjen.

Skæringspunktet mellem linjen og planen finder man på den måde, der er beskrevet i afsnittet om skæringer mellem linjer og planer.

Lad os se på et eksempel.

$$\alpha: \ 3x - y + 4z + 26 = 0$$
$$P(1,2,3)$$

Vi ønsker at projicere P ind på α.

Vi aflæser koordinaterne for planens normalvektor ud fra dens ligning

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Denne bruger vi som retningsvektor for linjen, l, gennem P og vinkelret på α.

Vi kan altså skrive linjens parameterfremstilling op således:

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man kan også skrive parameterfremstillingen op som de tre koordinatfunktioner

$$x = 1 + 3t$$

$$y = 2 - t$$

$$z = 3 + 4t$$

Nu skal vi finde skæringspunktet mellem linjen og planen. Det gør vi ved at sætte koordinatfunktionerne ind i planens ligning

$$3(1 + 3t) - (2 - t) + 4(3 + 4t) + 26 = 0$$

$$3 + 9t - 2 + t + 12 + 16t + 26 = 0$$

$$26t + 39 = 0$$

$$t = \frac{-39}{26} = -1,5$$

Nu har vi fundet ud af, at skæringspunktet findes, når t= -1,5.

Vi indsætter denne t-værdi i linjens parameterfremstilling for at se, hvilket punkt, det svarer til.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1,5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 1,5 \cdot 3 \\ 2 - 1,5 \cdot (-1) \\ 3 - 1,5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4,5 \\ 2 + 1,5 \\ 3 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 3,5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Altså er projektionen af punktet på planen

$$P_\alpha = (-3.5,\ 3.5,\ -3)$$

1.17 Kuglen

Ligesom man i 2D arbejdede med cirkler, arbejder man i 3D med kugler. Når man siger, at et punkt ligger på en kugle, betyder det, at punktet ligger på kugleskallen (og altså ikke indeni kuglen).

Kuglens ligning er givet ved

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

hvor (a, b, c) er kuglens centrum, og r er kuglens radius.

Man kan aflæse kuglens centrum og radius ud fra ligningen.

For eksempel har kuglen med denne ligning

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 64$$

radius 8 og centrum i punktet (2, -3, 1) (vær opmærksom på fortegnene!).

Hvorfor ser ligningen sådan ud?

Lad os se lidt på, hvordan man er kommet frem til denne ligning.

Lad os antage at et punkt P(x,y,z) ligger på kuglen. Så må der gælde, at afstanden mellem punktet og centrum er lig med radius.

$$|CP| = r$$

Det svarer til, at længden af vektoren mellem de to punkter er lig med radius

$$|\overrightarrow{CP}| = r$$

Da vektoren mellem to punkter er slutpunktet fratrukket startpunktet, kan vi omskrive ovenstående til

$$\left| \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \right| = r$$

Nu udregner vi længden af vektoren

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$$

Ved at sætte begge sider i anden potens får vi kuglens ligning.

Omskrive kuglens ligning

Det er ikke altid, man får kuglens ligning givet på formen ovenfor. Nogle gange er parenteserne ganget ud (ved hjælp af kvadratsætningerne). I det tilfælde kan man ikke direkte aflæse centrum og radius.

I dette afsnit skal vi se, hvordan man omformer tilbage til standardformen, så man kan aflæse centrum og radius direkte. Metoden man bruger, kaldes kvadratkomplettering, og vi har tidligere brugt den til at løse andengradsligninger.

Lad os illustrere metoden med et eksempel.

Vores kugle er givet ved

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y + 4z = 2$$

Det først vi gør er at rykke rundt, så vi samler hhv x'erne, y'erne og z'erne

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 2$$

Nu er tricket at samle leddene med x'erne vha. en kvadratsætning. Vi kan se, at det ene tal i parentesen må være x. Vi betragter 6x som det dobbelte produkt (2*3*x). Derfor må det andet tal i parentesen være 3. Før vi kan samle det, kræver det dog, at vi lægger 3^2 til på begge sider.

$$x^2 + 3^2 + 6x + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 2 + 3^2$$

Nu kan vi samle de første tre led vha. en kvadratsætning

$$(x + 3)^2 + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 2 + 3^2$$

Nu gør vi det samme med y-leddene. -2y er det dobbelte produkt (2*(-1)*y). Derfor må tallene i parentesen være y og -1. Derfor lægger vi $(-1)^2$ til på begge sider.

$$(x + 3)^2 + y^2 + (-1)^2 - 2y + z^2 + 4z = 2 + 3^2 + (-1)^2$$

Nu samler vi y-leddene ved brug af kvadratsætningerne

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 + 4z = 2 + 3^2 + (-1)^2$$

Til sidst gør vi det samme med z-leddene. 4z er det dobbelte produkt (2*2*z). Så tallene i parentesen må være z og 2. Vi lægger 2^2 til på begge sider.

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 + 2^2 + 4z = 2 + 3^2 + (-1)^2 + 2^2$$

Nu samler vi ved hjælp af kvadratsætningerne

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 2 + 3^2 + (-1)^2 + 2^2$$

Hvis vi regner højresiden ud, står vi med ligningen

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 16$$

Nu har vi omformet til standardformen og kan aflæse kuglens centrum til (-3, 1, -2) og radius til 4.

1.18 Skæring mellem plan og kugle

Hvis man har givet et plan og en kugle, kan man være interesseret i at finde ud af, om de to objekter skærer hinanden.

For at afgøre om de skærer hinanden, finder man afstanden mellem kuglens centrum og planen. Dette gøres ved hjælp af formlen for afstand mellem et punkt og et plan.

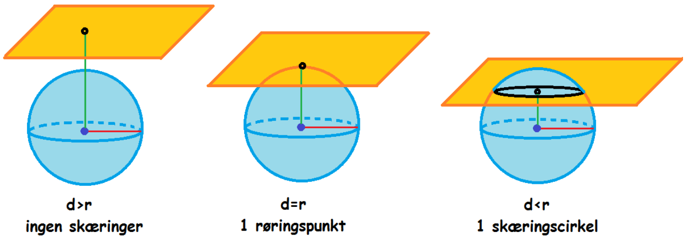
Man skal holde tungen lige i munden, for man plejer både at kalde kuglens centrum og koefficienterne i planens ligning for a, b og c. For at skelne kalder vi derfor kuglens centrum for

$$C(k_1, k_2, k_3)$$

Vi finder altså afstanden mellem centrum og plan ved formlen

$$\text{dist}(C, \alpha) = \frac{|ak_1 + bk_2 + ck_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Når man har fundet afstanden, sammenligner man med radius. Der er nu tre muligheder



Hvis der kun er et røringspunkt, er planen en tangentplan til kuglen. Hvis planen og kuglen skærer hinanden, vil det altid være i en cirkel. Der findes en formel for, hvordan man udregner ligningen for skæringscirklen, men den er relativt kompliceret, så den springer vi over her.

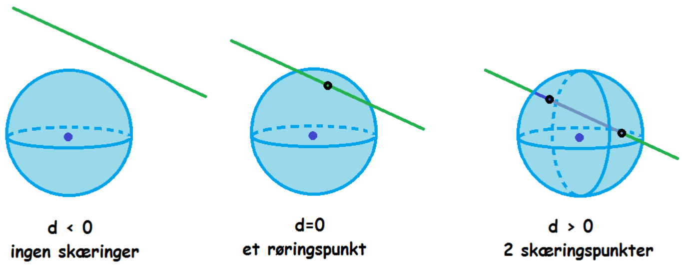
1.19 Skæring mellem linje og kugle

Hvis man har en linje og en kugle i rummet, kan man være interesseret i at finde ud af, om de skærer hinanden.

Man finder frem til eventuelle skæringspunkter ved at indsætte koordinatfunktionerne fra linjens parameterfremstilling i kuglens ligning.

Dette vil give en andengradsligning, hvor t er den ubekendte.

Man beregner andengradsligningens diskriminant, og der er tre muligheder



Hvis d $\geq$ 0, kan man finde frem til skæringspunkterne ved først at løse andengradsligningen, og dernæst indsætte de fundne t-værdier i linjens parameterfremstilling. Dermed vil man finde frem til røringspunkt/skæringspunkter.

Lad os tage et eksempel

Vores kugle har r=4 og C(-1, 2, 0). Dens ligning er

$$\mathcal{K}: \ (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$$

Vores linje har parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi skriver hver enkelt koordinatfunktion op

$$x = 1 + t$$

$$y = 1 + 2t$$

$$z = 3 + t$$

Nu sætter vi disse ind i kuglens ligning

$$((1+t)+1)^2 + ((1+2t)-2)^2 + (3+t)^2 = 16$$

$$(t+2)^2 + (2t-1)^2 + (t+3)^2 = 16$$

$$(t^2+4+4t) + (4t^2+1-4t) + (t^2+9+6t) = 16$$

$$6t^2 + 6t + 14 = 16$$

$$6t^2 + 6t - 2 = 0$$

Vi finder diskriminanten for andengradsligningen

$$d = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 36 + 48 = 84$$

Da diskriminanten er større end 0, er der to skæringer mellem kuglen og linjen.

Vi løser andengradsligningen

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{84}}{2 \cdot 6} \approx \frac{-6 \pm 9,17}{12}$$

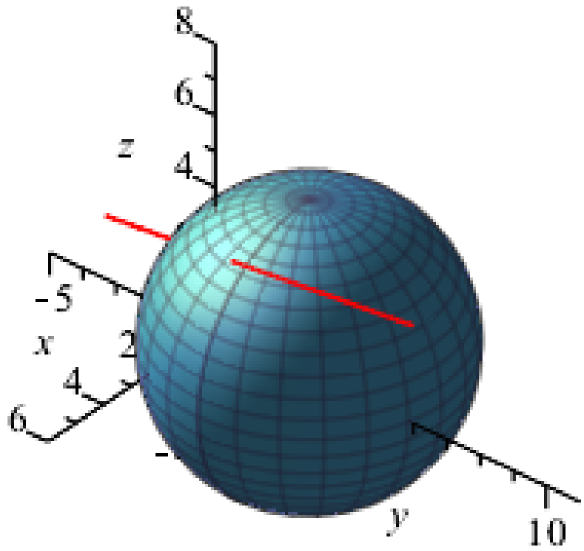
$$t_1 \approx 0,26 \qquad t_2 \approx -1,26$$

Ved at indsætte disse t-værdier i linjens parameterfremstilling, når vi frem til skæringspunkterne.

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0,26 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,26 \\ 1,52 \\ 3,26 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1,26 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,26 \\ -1,52 \\ 1,74 \end{pmatrix}$$

Altså har vi, at P_1(1.26, 1.52, 3,26) og P_2(-0.26, -1.52, 1.74) er de to skæringspunkter mellem kuglen og linjen.

Kuglen og linjen fra eksemplet er tegnet her



1.20 Tangentplan til kugle

Ligesom en cirkel i hvert punkt har en tangentlinje, så har en kugle i hvert punkt en tangentplan. En tangentplan er altså en plan, der rører kuglen i ét (og kun ét) punkt.

Man kan forestille sig tangentplanen som et stykke karton, der ligger op ad en fodbold.

I opgaver bliver man tit bedt om at bestemme en ligning for tangentplanen i et kendt punkt på kuglen.

Vi husker på, at man for at kunne opskrive en ligning for en plan skal kende et fast punkt i planen samt en normalvektor for planen. Som punktet, kan man bruge det punkt, man har fået opgivet, som altså ligger både på kuglen og i tangentplanen (røringspunktet). Så mangler man altså bare en normalvektor. Vektoren, der starter i det kendte punkt på kuglens overflade og slutter i centrum af kuglen vil være vinkelret på tangentplanen. Derfor kan vi bruge den som normalvektor.

Lad os se på et eksempel.

Vores kugle har ligningen

$$\mathcal{K}: \quad (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$$

og punktet

$$P(-4, 3, 0)$$

ligger på kugleskallen (man kan tjekke efter, at P rent faktisk ligger på kugleskallen ved at indsætte det i kuglens ligning og se, om den er opfyldt).

Vi ønsker at bestemme en ligning for kuglens tangentplan i punktet P.

Vores faste punkt i planen er P.

Vores normalvektor er vektoren fra P til C.

Vi aflæser fra kuglens ligning, at centrum har koordinaterne C(-2,1,-1).

Nu udregner vi normalvektorens koordinater

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} -2-(-4) \\ 1-3 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Til sidst skal vi bare sætte ind i formlen for planens ligning.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$2(x-(-4))+(-2)(y-3)+(-1)(z-0)=0$$

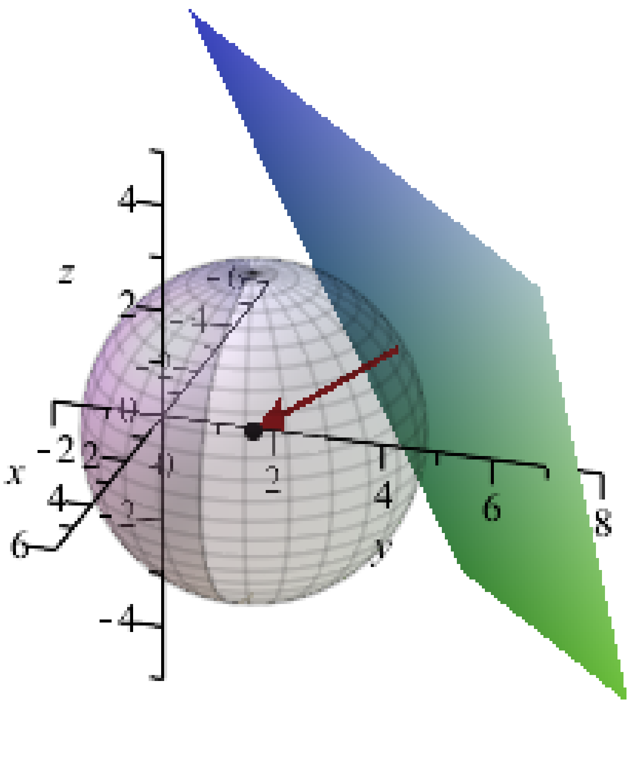
$$2(x+4)-2(y-3)-z=0$$

$$2x+8-2y+6-z=0$$

$$2x-2y-z+14=0$$

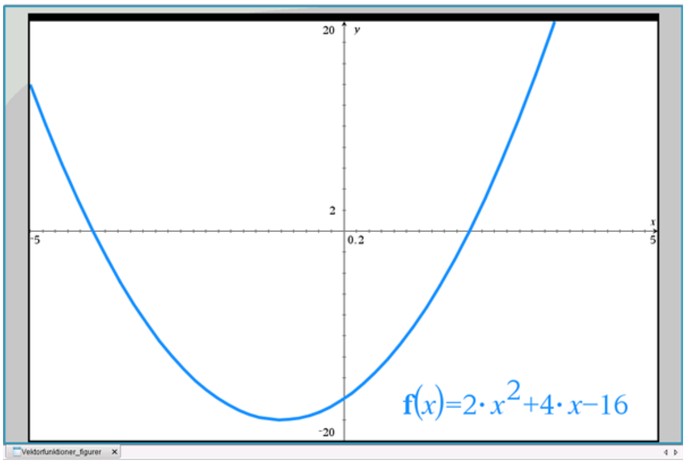
Og dette er så ligningen for tangentplanen til kuglen i punktet P.

Nedenfor er indtegnet kuglen, planen og normalvektoren fra eksemplet ovenfor.



2 Vektorfunktioner

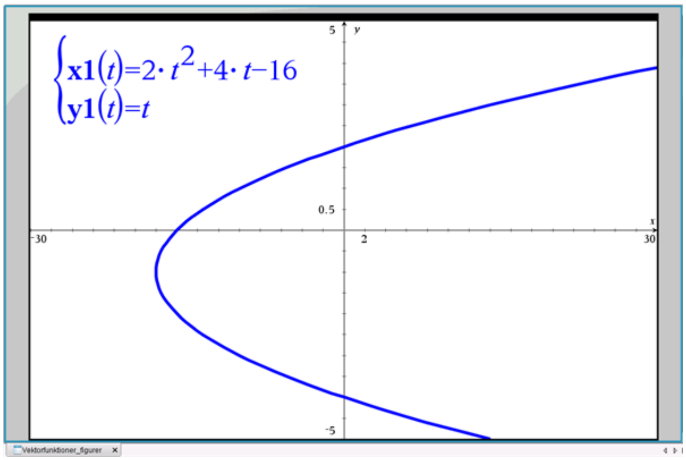
Du er vant til at arbejde med funktioner (og deres grafer) i et koordinatsystem, hvor y-værdien (den afhængige variabel) er beskrevet som en funktion af x (den uafhængige variabel). Det kunne eksempelvis være $y(x) = 2x^2+4x-16$, der er et andengradspolynomium, hvor grafen er en parabel, se figur 1.



Figur 1 Parablen $y(x) = 2x^2 + 4x - 16$

Når vi ser på funktioner og deres grafer, er det en forudsætning, at der er éntydighed, hvad angår funktionsværdier. Det betyder, at der for en hvilken som helst x-værdi i definitionsmængden skal være én og kun én tilhørende y-værdi. Dette er opfyldt for parablen i figur 1.

Men hvis du forestiller dig en liggende parabel, se figur 2, er denne betingelse **ikke** opfyldt. For alle x-værdier til højre for parablens toppunkt er der to tilhørende y-værdier. Vi vil vende tilbage til dette eksempel senere.



Figur 2 Liggende parabel.

2.1 Introduktion til parameterfremstillinger

Vektorfunktioner går ud på at beskrive kurver i et koordinatsystem ved hjælp af en parameterfremstilling.

Vi bruger betegnelsen kurver ifm. parameterfremstillinger, så der ikke sker forveksling med grafer, der hører til sædvanlige funktioner.

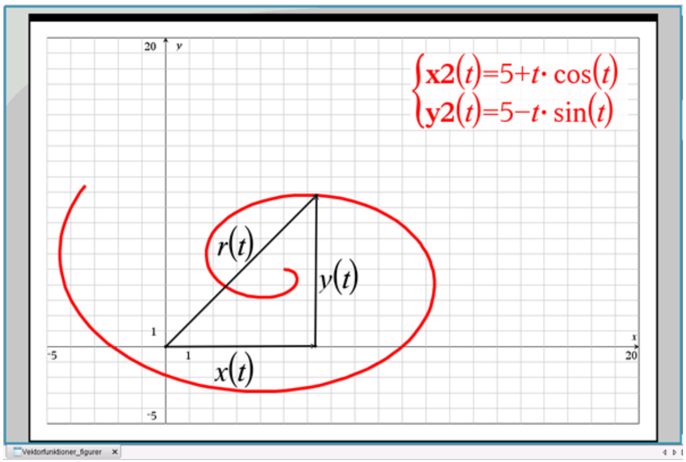
Tidligere har vi opfattet x som den uafhængige variabel og y som den afhængige variabel. Nu indfører vi en ny uafhængig variabel, t. Hermed bliver både x og y afhængig af t, og vi skriver hhv. x(t) og y(t).

Ofte vil vi benytte parameterfremstillingen til at beskrive banekurven for en bevægelse, hvor t

angiver tiden, og hvor $x(t)$ og $y(t)$ angiver positionen, dvs. hhv. x- og y-koordinaten for bevægelsen til tiden t.

Et vilkårligt punkt på kurven kan beskrives ved punktets stedvektor i et sædvanligt koordinatsystem, se figur:

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t))$



Figur 3 Afbildning af en vektorfunktion. $\overrightarrow{r(t)}$ er stedvektor til punkter på kurven

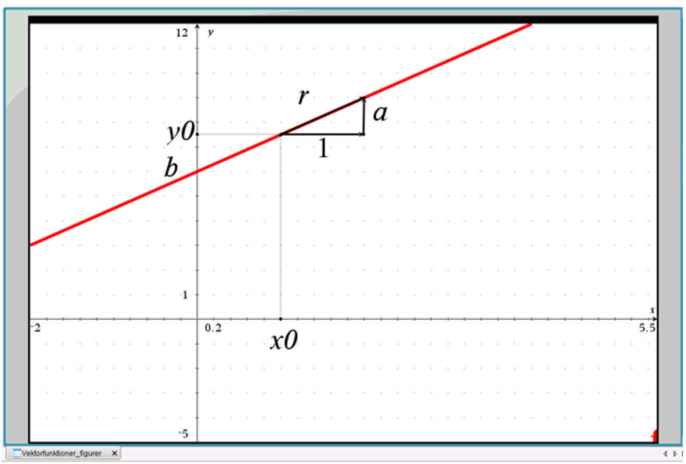
Vi kalder $\overrightarrow{r(t)}$ for en vektorfunktion, og for enhver værdi af t kan vi beregne de tilhørende værdier x(t) og y(t) og plotte punktet i koordinatsystemet. Når vi gør dette for alle værdier af t i definitionsmængden, fremkommer kurven.

Ved at bruge en parameterfremstilling til at beskrive en kurve, er vi - som det fremgår af figur 3 - ikke længere begrænset af, at der til enhver x-værdi kun er én tilhørende y-værdi.

2.2 Parameterfremstillingen for den rette linje

Den rette linje i et koordinatsystem er du vant til at se beskrevet ved forskriften $y(x) = a \cdot x + b$, hvor a angiver linjens hældningskoefficient (stigningstal) og b angiver linjens skæring med y-aksen.

At a er linjens hældningskoefficient, betyder, at vektoren $\overrightarrow{r} = (1, a)$ er en retningsvektor for linjen, se figur 4.



Figur 4 Afbildning af en ret linje

Linjen kan også beskrives ved en parameterfremstilling med udgangspunkt i retningsvektoren og et vilkårligt punkt på linjen (x_0, y_0). På figur 4 kan du se, at man kan få alle andre punkter på linjen ved at addere retningsvektoren $\vec{r} = (1, a)$ multipliceret med et vilkårligt tal til punktet (x_0, y_0):

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t \cdot \vec{r} = (t + x_0, a \cdot t + y_0)$, hvor $-\infty < t < +\infty$.

Hvis vi vælger linjens skæringspunkt med y-aksen som udgangspunkt for parameterfremstillingen, er $(x_0, y_0) = (0, b)$, og så bliver parameterfremstillingen:

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (t, a \cdot t + b)$, hvor $-\infty < t < +\infty$.

Eksempel 1

Bestem hældningen og skæring med y-aksen - og dermed forskriften - for en linje givet ved parameterfremstillingen:

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (t + 2, 2 \cdot t + 8)$, hvor $-\infty < t < +\infty$.

Skæring med y-aksen:

$x(t_0) = 0 \implies t_0 = -2$ og dermed $y(t_0) = 2 \cdot t_0 + 8 = 4$.

Hældningen er forholdet mellem faktorerne til t i hhv. $y(t)$ og $x(t)$:

$a = \dfrac{2 \cdot t}{t} = 2$ og dermed er $y(x) = 2x + 4$.

Eksempel 2

Find skæringspunktet mellem de to linjer givet ved:

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (t + 2, 2 \cdot t + 8)$, hvor $-\infty < t < +\infty$

$\overrightarrow{r(s)} = (x(s), y(s)) = (s, 3 \cdot s - 6)$, hvor $-\infty < s < +\infty$.

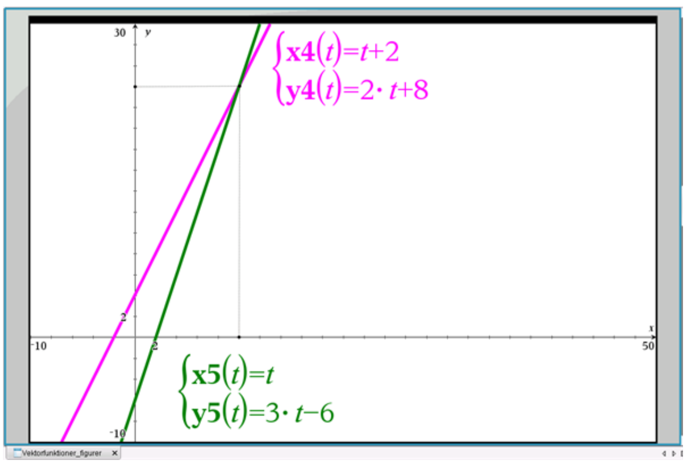
I linjernes skæringspunkt er $x(s) = x(t)$ og $y(s) = y(t)$:

$x(s) = x(t) \implies s = t + 2$, som indsættes i ligningen for y:

$y(s) = y(t) \implies 3(t + 2) - 6 = 2t + 8 \implies 3t = 2t + 8$

og dermed $t = 8$ og $s = t + 2 = 10$.

Ved at indsætte værdierne af s og t i de to parameterfremstillinger finder vi linjernes skæringspunkt $(x, y) = (10, 24)$, hvilket også ses i figur 5.



Figur 5 Skæringspunkt mellem to linjer

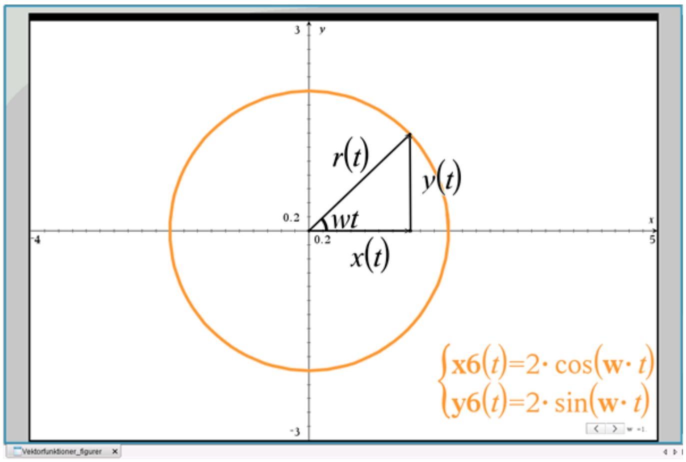
2.3 Parameterfremstillingen for en cirkel

Vi forestiller os en partikel, der gennemløber en cirkulær bevægelse med radius r og vinkelhastighed ω (rad/sek., positiv omdrejningsretning, dvs. mod uret). Tiden for ét gennemløb af cirklen betegnes partiklens omløbstid og er $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Vi afbilder bevægelsen i et koordinatsystem som cirklen med centrum i (0,0) og radius r, se figur 6. Ethvert punkt på cirkelperiferien kan beskrives ved stedvektoren:

$$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (r \cdot \cos(\omega t), r \cdot \sin(\omega t)),\ 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$$

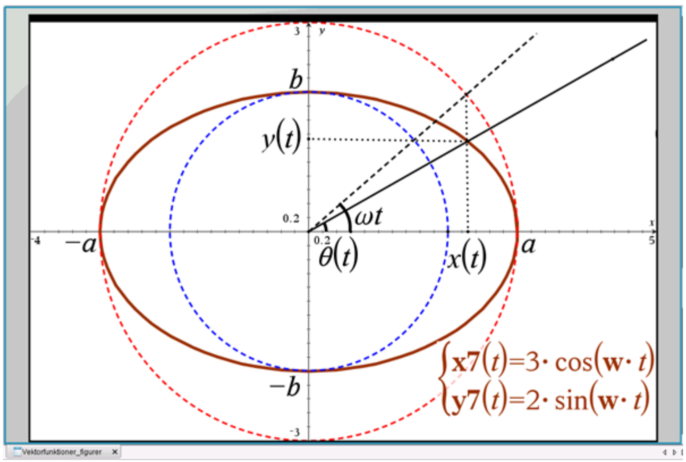
(hvor definitionsmængden for t her er afgrænset svarende til ét fuldt gennemløb af cirklen, men definitionsmængden for t kunne være opadtil ubegrænset svarende til uendeligt mange gennemløb af cirklen.)



Figur 6 Parameterfremstilling for en cirkel

2.4 Parameterfremstillingen for en elipse

Vi forestiller os en partikel, der gennemløber en ellipseformet bane, idet ellipsen har centrum i (0,0), storakse a i x-aksens retning og lilleakse b i y-aksens retning. I figur 7 er vist et eksempel, hvor $a = 3$ og $b = 2$.



Figur 7 Parameterfremstilling for en ellipse

På figuren er også indtegnet ”storcirklen” med radius $a = 3$ og ”lillecirklen” med radius $b = 2$.

Vi ser, at koordinaterne til et punkt $(x(t), y(t))$ i den ellipseformede bane svarer til hhv. x-koordinaten i storcirklen og y-koordinaten i lillecirklen, begge hørende til en vinkeldrejning $\omega \cdot t$, hvor ω (rad/sek) betegner den gennemsnitlige vinkelhastighed i ellipsebanen, og omløbstiden er $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

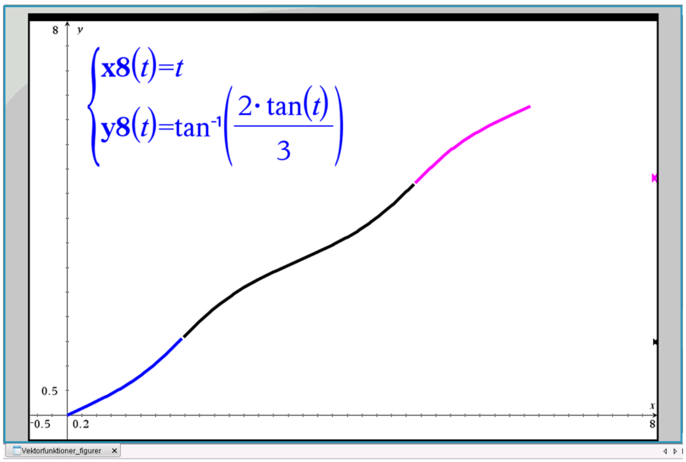
$$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (a \cdot \cos(\omega t), b \cdot \sin(\omega t)),\ 0 \leq t \leq \tfrac{2\pi}{\omega}$$

(hvor definitionsmængden for t her igen er afgrænset svarende til ét fuldt gennemløb).

I figur 7 har vi med $\theta(t)$ angivet vinklen fra x-aksen til stedvektoren til partiklen i ellipsebanen, og her gælder:

$$\tan(\theta(t)) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{b\ \cdot\ \sin(\omega t)}{a\ \cdot\ \cos(\omega t)} = \frac{2}{3} \cdot \tan(\omega t),\ 0 \leq t \leq \tfrac{2\pi}{\omega}.$$

I figur 8 er vist grafen for $\theta(t)$ som funktion af tiden. Det fremgår, at vinkelhastigheden (aflæses som grafens hældning) i en ellipsebane ikke er konstant. Den er nemlig størst omkring lilleaksens poler og mindst omkring storaksens poler.



Figur 8 Vinkelhastigheden varierer i en elliptisk banekurve

2.5 Skæring med koordinatsystemets akser

På koordinatsystemets y-akse er $x = 0$, og på koordinatsystemets x-akse er $y = 0$.

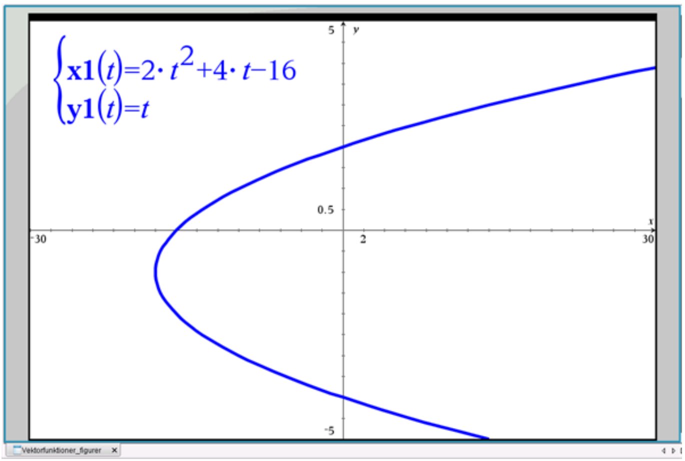
For at undersøge om en vektorfunktion med en given parameterfremstilling indeholder skæringspunkter med koordinatsystemets akser, skal vi derfor finde eventuelle løsninger til de to ligninger:

Skæring med y-aksen: $x(t) = 0$

Skæring med x-aksen: $y(t) = 0$

Eksempel:

Vi vender tilbage til den liggende parabel fra afsnit 1, se figur 9. Her er: $x(t) = 2t^2 + 4t - 16$ og $y(t) = t$, hvor $-\infty < t < +\infty$.



Figur 9 Liggende parabel

Skæring med y-aksen:

$x(t) = 2t^2 + 4t - 16 = 0$ med løsningerne $t = -4$ og $t = 2$, hvor $y(-4) = -4$ og $y(2) = 2$, og dermed er skæringspunkterne $(x, y) = (0, -4)$ og $(0, 2)$.

Skæring med x-aksen:

$y(t) = t = 0$ med løsningen $t = 0$, hvor $x(0) = -16$, og dermed er skæringspunktet $(x, y) = (-16, 0)$.

2.6 Dobbeltpunkt

Et dobbeltpunkt for en vektorfunktion er et punkt, hvor den tilhørende kurve skærer sig selv. (Vi medregner ikke kurver, der gennemløbes flere gange, hvor alle punkter på kurven kan siges at være et dobbeltpunkt.)

For at undersøge om parameterfremstillingen for en vektorfunktion indeholder et eller flere dobbeltpunkter, skal vi altså søge løsninger til ligningssystemet:

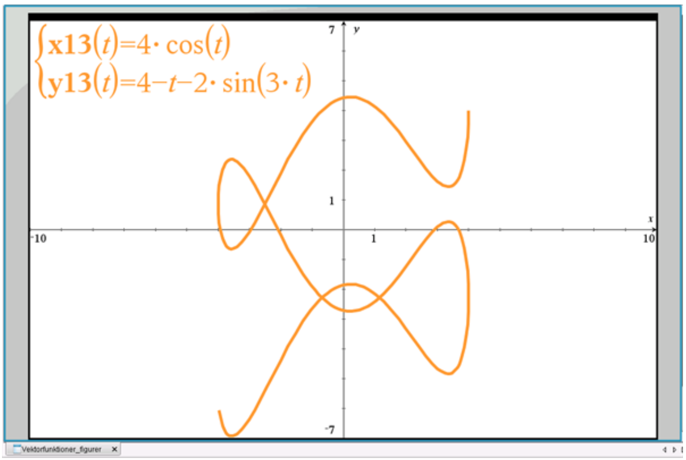
$\overrightarrow{r(t_2)} = \overrightarrow{r(t_1)}$ eller $x(t_2) = x(t_1)$ og $y(t_2) = y(t_1)$

Eksempel

Der er givet følgende vektorfunktion (t angiver radianer):

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (4 \cdot \cos(t), 4 - t - 2 \cdot \sin(3t))$

I figur 10 er tegnet en del af kurven, der starter ved $t = 0$ i $(x, y) = (4, 4)$. Bestem koordinaterne til parameterfremstillingens første dobbeltpunkt.



Figur 10 Dobbeltpunkter for en vektorfunktion er punkter, hvor kurven skærer sig selv

Betingelsen $x(t_2) = x(t_1)$ giver, at $\cos(t_2) = \cos(t_1)$. Denne ligning har flere (uendeligt mange) løsninger, men vi er her kun interesserede i den første: $t_2 = 2\pi - t_1$, som indsættes i $y(t_2) = y(t_1)$:

$4 - (2\pi - t_1) - 2 \cdot \sin(6\pi - 3t_1) = 4 - t_1 - 2 \cdot \sin(3t_1)$

Denne ligning omformes til: $2 \cdot t_1 - 2\pi + 4 \cdot \sin(3t_1) = 0$, som løses i et værktøjsprogram: $t_1 = 2,249$ og $t_2 = 2\pi - t_1 = 4,034$ og

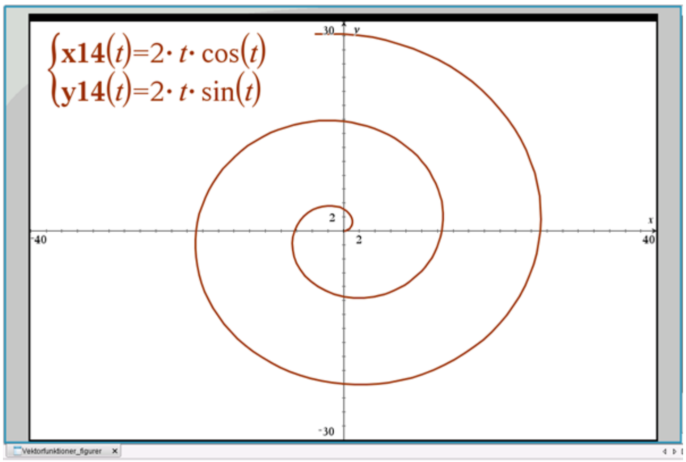
$\overrightarrow{r(t_1)} = \overrightarrow{r(t_2)} = (x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2)) = (-2,51, 0,85)$

2.7 Archimedes' spiral

Parameterfremstillingen for Archimedes' spiral, opkaldt efter den græske matematiker Archimedes, er (t angiver radianer):

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = a \cdot (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t)),\ 0 \leq t < +\infty$

Kurven er en spiral, der starter i (0,0) og har positiv omløbsretning mod uret, se figur 11, hvor vi har sat $a = 2$.



Figur 11 Archimedes spiral

Skæring med y-aksen:

For at finde skæringspunkter med y-aksen skal vi søge løsninger til ligningen $x(t) = 0$, dvs.:

$t \cdot \cos(t) = 0$, med løsningerne: $t = 0$ og $t = n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$, hvor $n = 1, 2, 3...$

Skæring med x-aksen:

For at finde skæringspunkter med x-aksen skal vi søge løsninger til ligningen $y(t) = 0$, dvs.:

$t \cdot \sin(t) = 0$, med løsningerne: $t = 0$ og $t = n \cdot \pi$, hvor $n = 1, 2, 3...$

Ved at indsætte disse løsninger i vektorfunktionen ser vi, at afstanden (målt på akserne) mellem to på hinanden følgende skæringspunkter med enten y-aksen eller x-aksen er den samme for alle skæringspunkter, nemlig $a \cdot \pi$.

Vi formulerer det som, at Archimedes spiral skærer akserne i uendelig mange punkter med **ækvidistant** afstand $a \cdot \pi$.

2.8 Differentiation af vektorfunktion

Hvis vi betragter kurven hørende til en vektorfunktion som en partikels bevægelsesbane, kan vi være interesserede i at bestemme partiklens hastighed og acceleration.

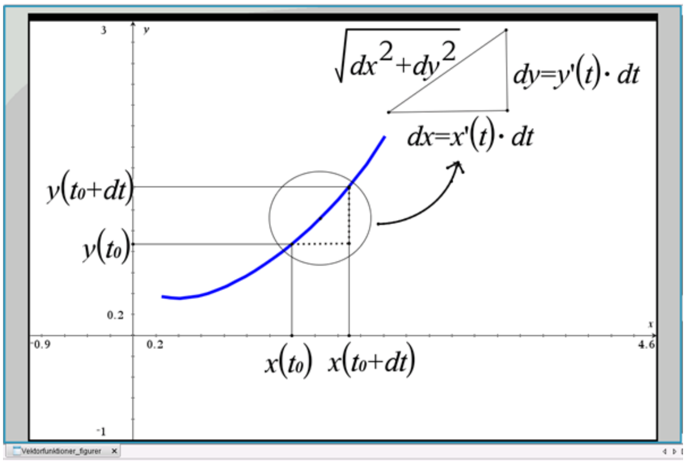
Her benytter vi vores viden om differentiation af funktioner. Vi antager, at både $x(t)$ og $y(t)$ i parameterfremstillingen er differentiable mht. t.

I figur 12 ser vi på partiklens position til tiden t_0 og $t_0 + dt$. Da både $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable mht. t, gælder:

$x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$ og $y'(t) = \dfrac{dy}{dt}$

Ved at gange igennem med dt fremkommer:

$dx = x'(t) \cdot dt$ og $dy = y'(t) \cdot dt$



Figur 12 Differentiation af vektorfunktion

Vi kan bestemme kurvens hældning - og dermed tangentens hældning - i punktet (x_0, y_0):

$$\text{hældning} = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

Vi kan bestemme partiklens hastighedsvektor, som også er retningsvektor for tangenten til banekurven:

$\overrightarrow{v(t_0)} = (x'(t_0), y'(t_0))$

Partiklens fart er da længden af hastighedsvektoren:

$|\overrightarrow{v(t_0)}| = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}$

Fra bevægelseslæren ved vi, at accelerationen fremkommer ved differentiering af hastigheden, så partiklens accelerationsvektor er:

$\overrightarrow{a(t_0)} = (x''(t_0), y''(t_0))$

og længden af accelerationsvektoren er:

$|\overrightarrow{a(t_0)}| = \sqrt{x''(t_0)^2 + y''(t_0)^2}$

Eksempel 1

For en cirkulær banekurve med centrum i (0,0) er:

$(x(t), y(t)) = (r \cdot \cos(\omega t), r \cdot \sin(\omega t))$ og

$(x'(t), y'(t)) = (-\omega r \cdot \sin(\omega t), \omega r \cdot \cos(\omega t))$ og

$(x''(t), y''(t)) = (-\omega^2 r \cdot \cos(\omega t), -\omega^2 r \cdot \sin(\omega t))$, hvor

r er radius (meter), vinkelhastigheden $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (rad/sek) og T er omløbstiden (sek).

Partiklens hastighed er konstant og følger overalt tangentens retning, der er vinkelret på radius til partiklens aktuelle position:

$|\overrightarrow{v(t)}| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \omega \cdot r$ (m/s)

Partiklens acceleration er ligeledes konstant og har retning fra partiklens aktuelle position ind mod cirklens centrum med længden:

$|\overrightarrow{a(t)}| = \sqrt{x''(t)^2 + y''(t)^2} = \omega^2 \cdot r$ (m/s^2)

Eksempel 2

For en ellipseformet banekurve med centrum i (0,0) er:

$(x(t), y(t)) = (a \cdot \cos(\omega t), b \cdot \sin(\omega t))$ og

$(x'(t), y'(t)) = (-\omega a \cdot \sin(\omega t), \omega b \cdot \cos(\omega t))$ og

$(x''(t), y''(t)) = (-\omega^2 a \cdot \cos(\omega t), -\omega^2 b \cdot \sin(\omega t))$, hvor

a, b er ellipsebanens akser (meter) i hhv. x-retningen og y-retningen, den gennemsnitlige vinkelhastighed $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (rad/sek) og T er omløbstiden (sek).

Bemærk, at accelerationsvektoren - ligesom for cirklen - har retning fra partiklens aktuelle position ind mod ellipsens centrum.

Partiklens hastighed og acceleration er:

$$|\overrightarrow{v(t)}| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \omega \cdot a \cdot \sqrt{\sin^2(\omega t) + (\frac{b}{a})^2 \cdot \cos^2(\omega t)} \text{ (m/s)}$$

$$|\overrightarrow{a(t)}| = \sqrt{x''(t)^2 + y''(t)^2} = \omega^2 \cdot a \cdot \sqrt{\cos^2(\omega t) + (\frac{b}{a})^2 \cdot \sin^2(\omega t)} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Partiklens hastighed er størst omkring lilleaksens poler (hvis $a > b$: på y-aksen i hhv. $+b$ og $-b$), og partiklens acceleration er størst omkring storaksens poler (hvis $a > b$: på x-aksen i hhv. $+a$ og $-a$).

2.9 Lodret og vandret tangent for en vektorfunktion

Fra forrige afsnit ved vi, at tangentvektoren til en vektorfunktion er givet ved:

$\overrightarrow{v(t)} = (x'(t), y'(t))$

For at undersøge om kurven for en vektorfunktion indeholder vandret eller lodret tangent, skal vi søge løsninger til de to ligninger:

Vandret tangent: $y'(t) = 0$

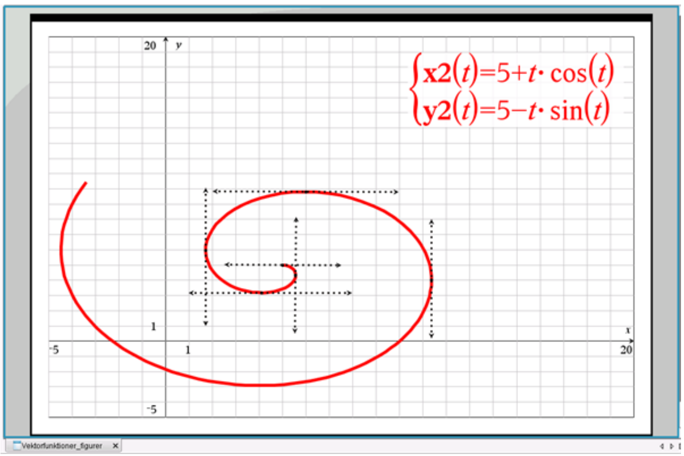
Lodret tangent: $x'(t) = 0$

Eksempel

Vi vender tilbage til spiralen fra afsnit 2, se figur 13. Her er: $x(t) = 5 + t \cdot \cos(t)$ og $y(t) = 5 - t \cdot \sin(t)$, hvor $t \geq 0$.

Vandret tangent: $y'(t) = -\sin(t) - t \cdot \cos(t) = 0$ og dermed $\tan(t) = -t$, hvor de tre første løsninger er $t = 0, t = 2,03$ og $t = 4,91$.

Lodret tangent: $x'(t) = \cos(t) - t \cdot \sin(t) = 0$ og dermed $\tan(t) = \dfrac{1}{t}$, hvor de tre første løsninger er $t = 0,86, t = 3,43$ og $t = 6,44$.



Figur 13 Spiralen fra afsnit 2, her gengivet med de tre første vandrette og lodrette tangenter indtegnet

Punkter på spiralen med hhv. vandret og lodret tangent:

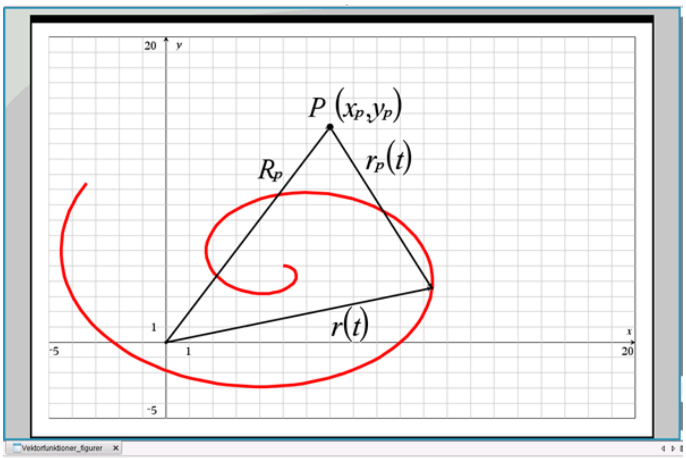
t	x	y	t	x	y
0,0	5,0	5,0	0,86	5,6	4,3
2,03	4,1	3,2	3,43	1,7	6,0
4,91	6,0	9,8	6,44	11,4	4,0

2.10 Afstand mellem kurven for en vektorfunktion og et punkt

Vi betragter en kurve for en vilkårlig vektorfunktion. Vi ønsker at bestemme den korteste afstand mellem kurven og et givent punkt $P(x_p, y_p)$ i koordinatsystemet.

Vi kan opskrive vektorligningen, se figur 14:

$$\overrightarrow{R_p} = \overrightarrow{r(t)} + \overrightarrow{r_p(t)} \implies \overrightarrow{r_p(t)} = \overrightarrow{R_p} - \overrightarrow{r(t)} = (x_p - x(t), y_p - y(t))$$



Figur 14 Afstand mellem en kurve og et punkt

Længden af $\overrightarrow{r_p(t)}$ er da afstanden fra kurven til punkt P, og kvadratet på længden af $\overrightarrow{r_p(t)}$ er:

$$|\overrightarrow{r_p(t)}|^2 = (x_p - x(t))^2 + (y_p - y(t))^2 \qquad = (x_p^2 + y_p^2) + (x(t)^2 + y(t)^2) - 2 \cdot (x_p \cdot x(t) + y_p \cdot y(t))$$

Den korteste afstand mellem kurven og punkt P forekommer for en værdi af t, hvor grafen for højresiden har et minimumspunkt og dermed har vandret tangent. Fra differentialregningen ved vi, at vi skal differentiere højre siden mht. t og sætte den afledte funktion lig nul. Herefter skal vi undersøge, om der faktisk er tale om et minimumspunkt og ikke et maksimumspunkt:

$$\frac{d}{dt}(|\overrightarrow{r_p(t)}|^2) = 2 \cdot x'(t)(x(t) - x_p) + 2 \cdot y'(t)(y(t) - y_p) = 0 \implies \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{x(t) - x_p}{y(t) - y_p} = -\frac{x_p - x(t)}{y_p - y(t)}$$

Samme ligning kommer vi frem til, hvis vi betragter problemstillingen rent geometrisk. Den korteste afstand mellem kurven og punkt P forekommer for en værdi af t, hvor $\overrightarrow{r_p(t)}$ står vinkelret på tangenten til vektorfunktionens kurve. Fra afsnittet om differentiation af vektorfunktion ved vi, at vektoren $\overrightarrow{v(t)} = (x'(t), y'(t))$ er retningsvektor for tangenten, og om prikproduktet mellem $\overrightarrow{r_p(t)}$ og $\overrightarrow{v(t)}$ gælder da:

$$\overrightarrow{r_p(t)} \bullet \overrightarrow{v(t)} = (x_p - x(t)) \cdot x'(t) + (y_p - y(t)) \cdot y'(t) = 0 \implies \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{x_p - x(t)}{y_p - y(t)}$$

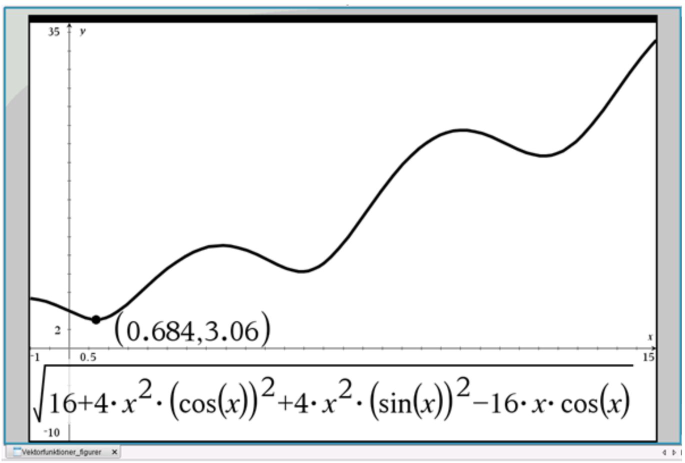
Eksempel

For Archimedes spiral, se figur 11 i afsnit 5, vil vi finde den korteste afstand til punkt $P(4,0)$. Vi skal altså søge løsninger til følgende ligning for positive værdier af t:

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2\sin(t) + 2t\cos(t)}{2\cos(t) - 2t\sin(t)} = -\frac{4 - 2t\cos(t)}{0 - 2t\sin(t)}$$

Vi løser ligningen vha. et CAS-værktøj, og der er flere løsninger, hvor $\overrightarrow{r_p(t)}$ står vinkelret på $\overrightarrow{v(t)}$. Vi ser dog hurtigt, at vi er interesserede i den mindste værdi af t: $t_0 = 0{,}684$, hvor $\overrightarrow{r(t_0)} = (1{,}061, 0{,}865)$, $\overrightarrow{r'(t_0)} = (0{,}684, 2{,}325)$, $\overrightarrow{r_p(t_0)} = (2{,}939, -0{,}865)$ og $|\overrightarrow{r_p(t_0)}| = 3{,}06$.

I figur 15 er vist grafen for længden af $\overrightarrow{r_p(t)}$ som funktion af t, og vi ser, at der er tale om et minimumspunkt i $t = t_0$.



Figur 15 Afstanden fra punkt $P(4,0)$ til punkter på Archimedes spiral som funktion af t

2.11 Længde af en kurve givet ved en vektorfunktion

Fra afsnittet om differentiering af vektorfunktion ved vi, at farten til tiden $t = t_0$ er:

$|\overrightarrow{v(t_0)}| = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}$

og længden af banekurven, der gennemløbes i tiden dt, er derfor:

$dL = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt$

Længden af banekurven gennemløbet i perioden fra tiden $t = a$ til tiden $t = b$ finder vi ved at integrere dL:

$$L = \int_{t=a}^{t=b} dL = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Eksempel 1

Beregn for den liggende parabel, se figur 9 i afsnit 3, længden af den del af banekurven, der ligger i 2. og 3. kvadrant.

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (2t^2 + 4t - 16, t)$ og dermed

$\overrightarrow{v(t)} = (x'(t), y'(t)) = (4t + 4, 1)$

Den del af banekurven, der ligger i 2. og 3. kvadrant, forløber mellem de to skæringspunkter med y-aksen. Vi har tidligere set, at disse svarer til t-værdierne - 4 og 2, som dermed er vores integrationsgrænser:

$$L = \int_{-4}^{2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_{-4}^{2} \sqrt{16t^2 + 32t + 17}\ dt$$

Integralet beregnes vha. et CAS-værktøj og giver 36,9.

Eksempel 2

Beregn for Archimedes spiral, se figur 11 i afsnit 5, længden af banekurven fra $t = 0$ og indtil første positive skæringspunkt med x-aksen.

$\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t)) = (2t\cos(t), 2t\sin(t))$og dermed

$\overrightarrow{v(t)} = (x'(t), y'(t)) = (2\cos(t) - 2t\sin(t), 2\sin(t) + 2t\cos(t))$

Første positive skæringspunkt med x-aksen er for $t = 2\pi$, så integrationsgrænserne er 0 og 2π:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4t^2+4}\ dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{t^2+1}\ dt$$

Integralet beregnes vha. et CAS-værktøj og giver 21,3.

2.12 Omskrivning fra parameterfremstilling til sædvanlig funktion

For visse vektorfunktioner er det muligt at omskrive parameterfremstillingen $(x(t), y(t))$ til en sædvanlig funktion af typen $y = f(x)$.

Et tilfælde er allerede vist i eksempel 1 i afsnit 2.2, hvor vi omskrev parameterfremstillingen for en ret linje, nemlig $(x(t), y(t)) = (t+2, 2\cdot t+8)$, hvor $-\infty < t < +\infty$, til funktionen $y = 2\cdot x+4$, hvor $-\infty < x < +\infty$.

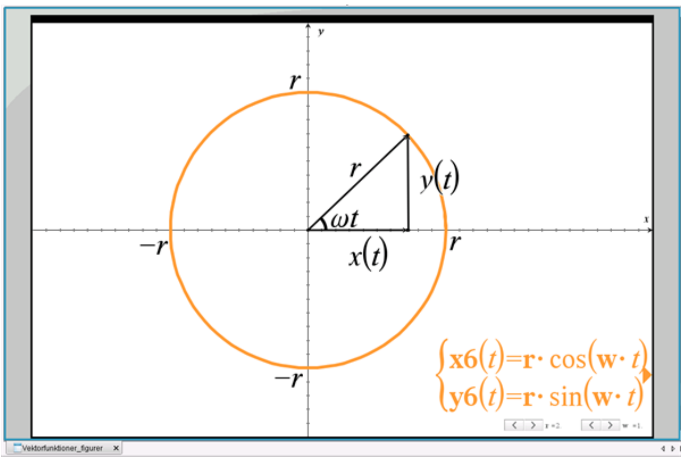
Når vi skal foretage omskrivning af en parameterfremstilling, skal vi først sikre os, at funktionen bliver éntydig. Det vil sige, at der for enhver x-værdi kun er én y-værdi. Det kan ofte kræve, at funktionen opdeles i to eller flere del-funktioner, som vist i eksemplerne nedenfor.

I nogle tilfælde er det ikke muligt (eller ikke anbefalelsesværdigt at forsøge!) at omskrive parameterfremstillingen. Det gælder f.eks. den snoede kurve i afsnit 4 og Archimedes spiral i afsnit 5.

Eksempel 1

Cirklen er som parameterfremstilling givet ved, se figur 16:

$(x(t), y(t)) = (r\cdot\cos(\omega t), r\cdot\sin(\omega t))$, $0 \le t \le \frac{2\pi}{\omega}$



Figur 16 Cirklen

Umiddelbart har cirklen to y-værdier for hver x-værdi (i intervallet $-r < x < r$), men hvis vi opdeler cirklen i to halvcirkler, hhv. over og under x-aksen, opnår vi den ønskede éntydighed.

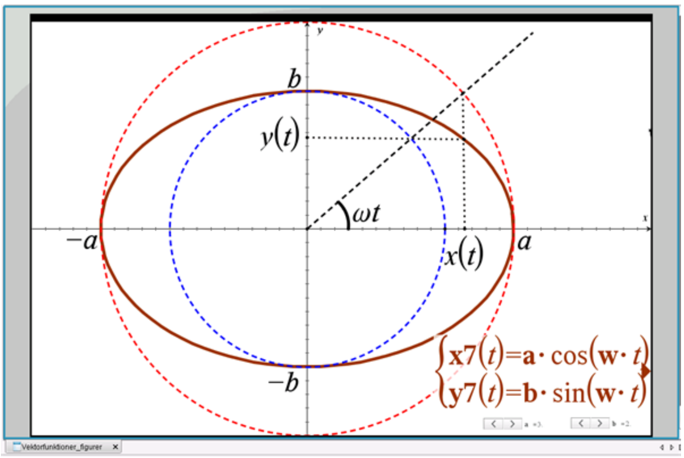
For ethvert punkt på cirklen gælder: $x(t)^2 + y(t)^2 = r^2$, som ved omskrivning giver: $y(t)^2 = r^2 - x(t)^2$. Denne ligning har to løsninger:

halvcirklen over x-aksen: $y_1(x) = \sqrt{r^2-x^2} = r\cdot\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}$ halvcirklen under x-aksen: $y_2(x) = -\sqrt{r^2-x^2} = -r\cdot\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}$

For begge funktioner er definitionsmængden: $-r \le x \le r$.

Eksempel 2

På helt tilsvarende måde kan en ellipse, se figur 17:



Figur 17 Ellipsen

med parameterfremstillingen: $(x(t), y(t)) = (a \cdot \cos(\omega t), b \cdot \sin(\omega t))$, $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$, opdeles i to halv-ellipser, hhv. over og under x-aksen.

Vi udnytter, at der for ellipsen gælder: $(\frac{x(t)}{a})^2 + (\frac{y(t)}{b})^2 = 1$, og omskrivningen til to del-funktioner er:

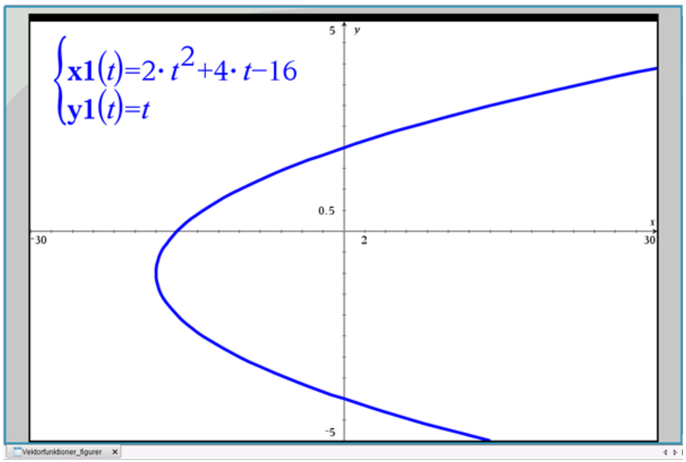
halv-ellipsen over x-aksen: $y_1(x) = b \cdot \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$

halv-ellipsen under x-aksen: $y_2(x) = -b \cdot \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$

For begge funktioner er definitionsmængden: $-a \leq x \leq a$.

Eksempel 3

Den liggende parabel fra afsnit 1 er givet ved parameterfremstillingen: $(x(t), y(t)) = (2t^2 + 4t - 16, t)$, hvor $-\infty < t < +\infty$, se figur 18.



Figur 18 Liggende parabel

Vi kan opdele parablen i to halvdele, som vi kalder parabel-grene. De to parabelgrene ligger hhv. over og under den vandrette symmetriakse $y = -1$, der går gennem parablens toppunkt $(x_T, y_T) = (-18, -1)$.

For en vilkårlig x-værdi, hvor $-18 \leq x < +\infty$, kan vi bestemme de tilhørende y-værdier på de to parabel-grene som løsningerne til ligningen $2t^2 + 4t - 16 = x$, idet vi fra parameterfremstillingen har, at $y = t$.

Ligningen omskrives nemt til den velkendte form for en andengradsligning: $2y^2 + 4y - (x + 16) = 0$, som har to løsninger (idet diskriminanten er $d = b^2 - 4ac = 16 + 8 \cdot (x + 16) = 16 \cdot (\frac{x}{2} + 9)$):

øverste parabel-gren: $y_1(x) = \dfrac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \dfrac{-4 + 4 \cdot \sqrt{\frac{x}{2} + 9}}{4} = -1 + \sqrt{\dfrac{x}{2} + 9}$

nederste parabel-gren: $y_1(x) = \dfrac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \dfrac{-4 - 4 \cdot \sqrt{\frac{x}{2} + 9}}{4} = -1 - \sqrt{\dfrac{x}{2} + 9}$

For begge funktioner er definitionsmængden: $-18 \leq x < +\infty$.

3 Trigonometri

3.1 Grundlæggende trigonometri

De grundlæggende begreber om geometri kan du finde på hhv. C-niveau- og B-niveau-delen af webmatematik.dk.

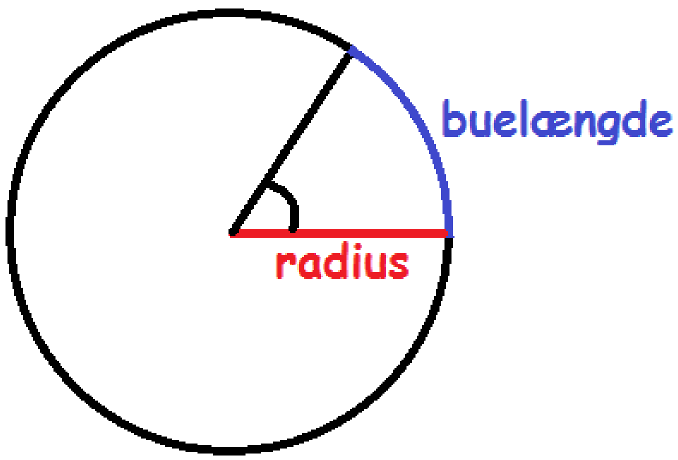
Her vil der kun blive gennemgået de ting, som er udelukkende A-niveaustof.

Så tag et kig i trigonometri-fanerne på C- og/eller B-niveau, hvis du ikke finder svar på dine spørgsmål her.

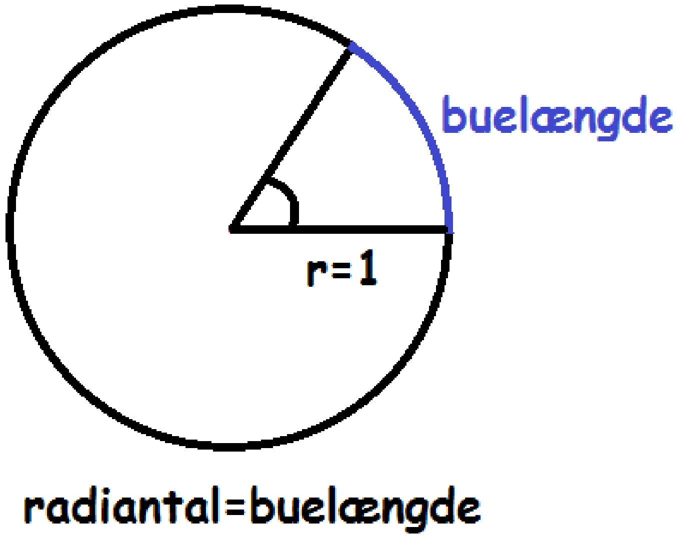
3.2 Radianer

Vi har været vant til at måle vinkler i grader. I dette tilfælde er der 360 grader rundt på en cirkel. I mange tilfælde kan det være nyttigt at måle vinkler i radianer. Skal man f.eks. differentiere de trigonometriske funktioner, kan det kun lade sig gøre, hvis man måler vinklerne i radianer. En vinkels radiantal er defineret som forholdet mellem vinklens buelængde og cirklens radius.

$$\text{vinkel i radianer} = \frac{\text{buelængde}}{\text{radius}}$$



Hvis vi har at gøre med enhedscirklen, er radius 1. Derfor svarer vinklens radiantal til den buelængde, den spænder over på enhedscirklen.



Da omkredsen af en cirkel er

$$O = 2\pi r$$

må omkredsen af enhedscirklen være

$$O = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

Derfor er der 2π radianer hele vejen rundt på en cirkel. Vi kan opstille følgende tabel, der omregner radianer og grader

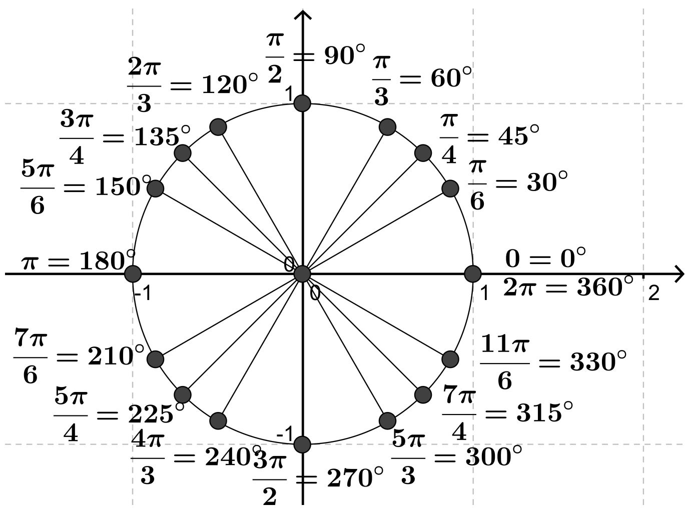
Grader	Radianer
$0°$	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$
$180°$	π
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$
$360°$	2π

Hvis man skal omregne nogle vinkler, der ikke står i tabellen, kan man bruge følgende formler. Her er v vinklen målt i grader, og x er vinklen målt i radianer

$$x = \frac{v}{360°} \cdot 2\pi$$

$$v = \frac{x}{2\pi} \cdot 360°$$

Her er tegnet en enhedscirkel med de vigtigste vinkler tegnet ind



3.3 Overgangsformler

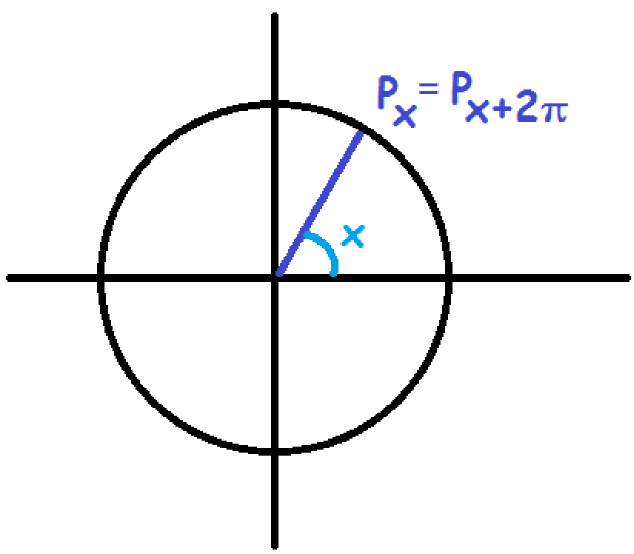
Der er en række formler for, hvordan man kan omskrive forskellige værdier af trigonometriske funktioner.

Vi begrunder dem alle sammen ved hjælp af en grafiske fremstilling.

De første overgangsformler er

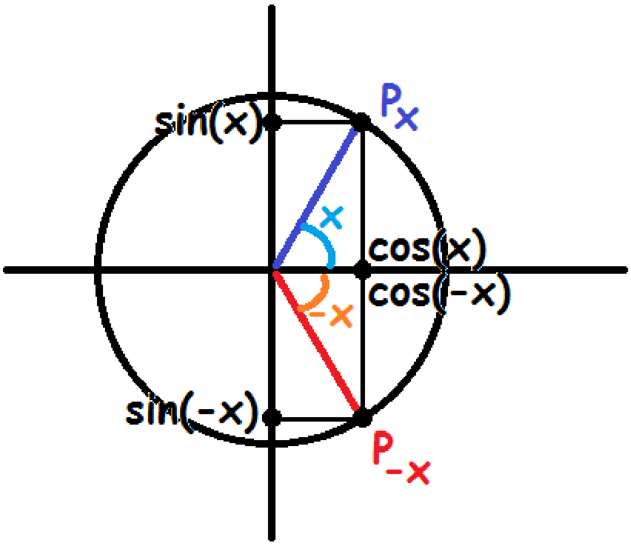
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$
$$\tan(x + 2\pi) = \tan(x)$$

Disse formler skyldes, at når man lægger 2π til en vinkel, så kører man en hel runde på cirklen. Man når altså tilbage til det samme sted, og derfor er cosinus- og sinus-værdierne de samme. Og da tangens er sinus divideret med cosinus, så er tangens-værdien også uændret.



I de næste overgangsformler, vi skal se på, sammenligner vi vinkel x med vinkel $-x$.

$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$



P_x og P_{-x} er spejlinger i x-aksen. Derfor er deres x-værdi den samme. Derfor er $\cos(x) = \cos(-x)$.

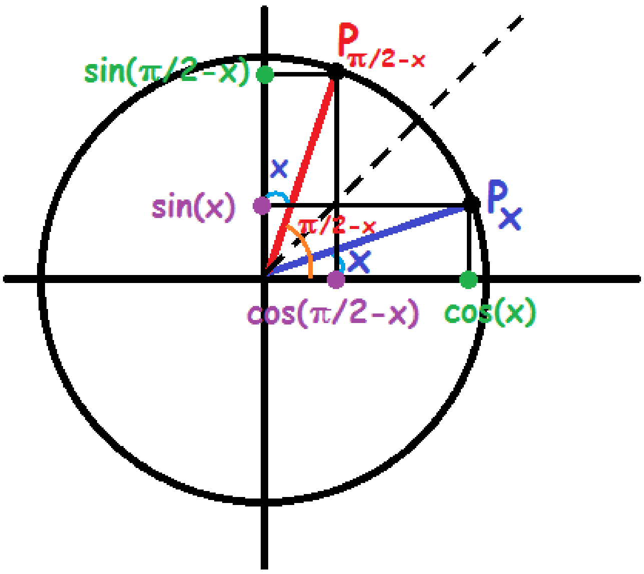
Deres y-værdier har derimod skiftet fortegn. Derfor er $\sin(-x) = -\sin(x)$ Tangens-værdien får man ved at dividere de to med hinanden

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

Nu prøver vi at sammenligne vinklerne x og $\frac{\pi}{2} - x$. (Vi husker på at $\frac{\pi}{2}$ svarer til 90 grader).

Her er overgangsformlerne

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$



Punkterne P_x og $P_{\frac{\pi}{2}-x}$ er spejlinger i linjen $y = x$. Derfor svarer den enes x-værdi til den andens y-værdi.

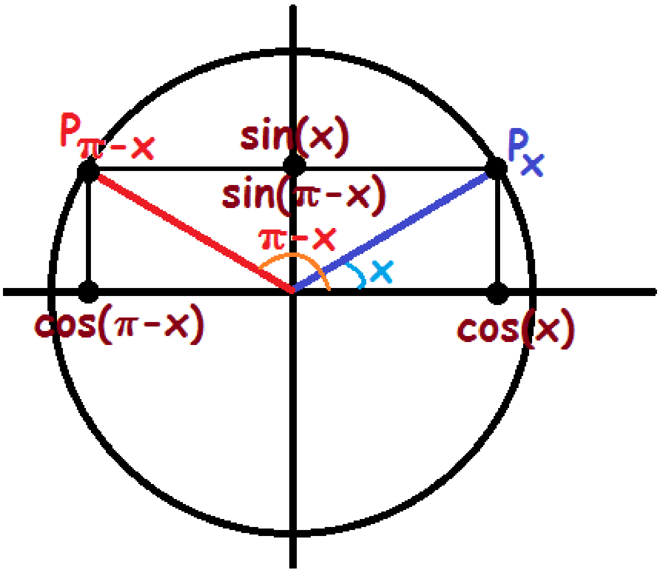
Vi dividerer sinus med cosinus for at nå frem til tangens

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)/\cos(x)}{\sin(x)/\cos(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

Nu sammenligner vi vinklerne x og $\pi - x$. (Vi husker på at π svarer til 180 grader).

Her er overgangsformlerne

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$



Punkterne P_x og $P_{\pi-x}$ er spejlinger i y-aksen. Derfor er deres y-værdier (deres sinus-værdier) ens. Deres x-værdier (cosinus-værdierne) har derimod skiftet fortegn.

Vi udregner tangens:

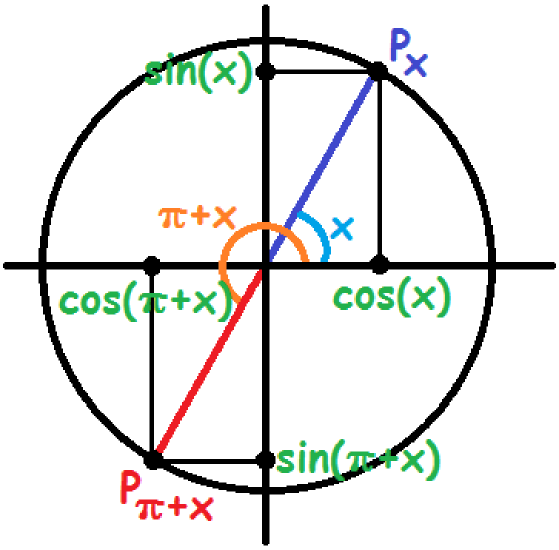
$$\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin(x)}{-\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

De sidste overgangsformler, vi skal se på, er mellem vinklerne x og $\pi + x$ I dette tilfælde er overgangsformlerne

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$



Vi kan se, at punkternes x-koordinater er ens bortset fra et modsat fortegn. Det samme gælder y-koordinaterne.

$$\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

Opsamling

For lige at samle op skriver vi her alle overgangsformlerne op

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$
$$\tan(x+2\pi) = \tan(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$
$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

3.4 Additionsformlerne

Før lommeregnerens tid, kunne det være besværligt at udregne værdier for de trigonometriske funktioner.

Et nyttigt redskab til at bestemme sådanne vinkler var additionsformlerne. Hvis man skal finde cosinus eller sinus til en vinkel, kan man splitte vinklen om til en sum af to vinkler, som man kender cosinus- og sinusværdierne for, og bruge dette til at bestemme cosinus- eller sinusværdien for denne vinkel.

Additionsformlerne er

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$$

Lad os se, hvordan vi kan anvende dem i praksis

Vi ønsker at beregne

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = ???$$

Vi kan dele det op så

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Nu kan vi bruge den øverste af de fire additionsformler

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Vi ved at

$$\cos(\pi) = -1,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad \sin(\pi) = 0,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

(tjek selv værdierne efter ved at tegne vinklerne ind i enhedscirklen, og aflæs cos- og sinværdierne).

Nu er der bare tilbage at sætte ind

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -1\cdot 0 - 0\cdot 1 = 0$$

Et andet eksempel er, at vi ønsker at beregne

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = ???$$

Vi omskriver til

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

Vi omskriver nu ved hjælp af den fjerde additionsformel

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\pi)$$

Vi husker at

$$\frac{\pi}{6}\text{ rad} = 30^\circ$$

og derfor ved vi, at

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},\ \cos(\pi) = -1,\ \sin(\pi) = 0$$

Nu er det bare at sætte ind i formlen

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\pi)$$

$$= 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot(-1) = \frac{1}{2}$$

3.5 Dobbeltvinkelformlerne

Ligesom additionsformlerne er også dobbeltvinkelformlerne brugbare, når man skal regne trigonometriske funktioners værdier ud uden brug af lommeregner.

Faktisk er dobbeltvinkelformlerne et særtilfælde af additionsformlerne, hvor de to vinkler man lægger sammen bare er ens.

Dobbeltvinkelformlerne ser således ud

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Lad os se, hvordan de kan anvendes.

Vi ved at

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Vi ønsker at beregne

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = ???$$

Vi omskriver ved hjælp af dobbelvinkelformlerne

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

4 Infinitesimalregning

4.1 Grundlæggende infinitesimalregning

Hvis du leder efter det grundlæggende om infinitesimalregning (den samlede betegnelse for differential- og integralregning), så skal du kigge under fanerne Differentialregning på B-niveau og Integralregning på A-niveau-delen af webmatematik.dk.

På A-niveau-delen behandler vi udelukkende stof, der bygger ovenpå det grundlæggende. Bl.a. skal vi se, hvordan man differentierer sammensatte funktioner, finde voluminer af omdrejningslegemer og ikke mindst lære nogle tips og tricks til at integrere kringlede funktioner.

4.2 Kontinuitet og differentiabilitet

På B-niveau definerede vi kontinuitet ved at sige, at en funktion var kontinuert, hvis man kunne tegne den uden at løfte blyanten fra papiret. Den definition giver et godt visuelt billede af, hvad en kontinuert funktion er - den er sammenhængende.

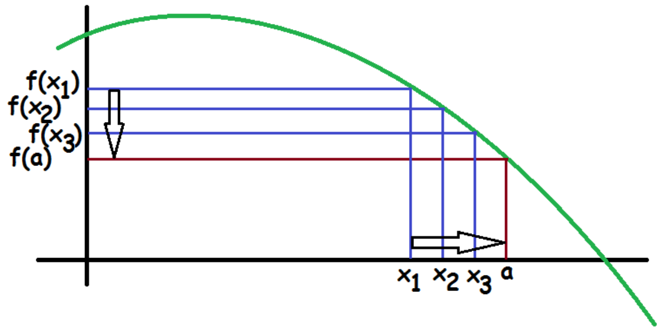
Imidlertid er det en definition, det er svært at arbejde med i praksis. Derfor indfører vi på A-niveau en mere matematisk definition.

$$f \text{ er kontinuert} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a}(f(x)) = f(a)$$

Med ord ville man sige "f er kontinuert hvis og kun hvis grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod a er lig med $f(a)$".

Det, som definitionen egentlig siger, er, at hvis vi lader vores x-værdi komme uendeligt tæt på et fast punkt, så skal funktionsværdierne også komme uendeligt tæt på funktionsværdien i det faste punkt.

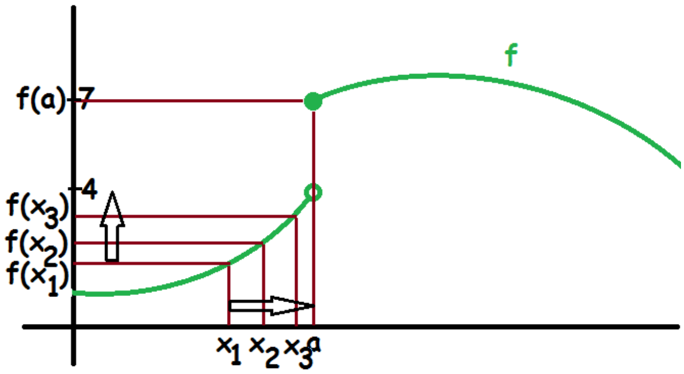
Definitionen kan måske virke kringlet, men måske kan følgende eksempler vise dig, hvordan den virker, og overbevise dig om, at den er smart.



På tegningen herover er tegnet grafen for en kontinuert funktion. Når vi lader vores x-værdier komme tættere og tættere på det faste punkt a, så kommer funktionsværdierne også tættere på $f(a)$. Vi kunne gå uendeligt tæt på a, og så ville funktionsværdien også være uendeligt tæt på $f(a)$.

Bemærk, at vi også kunne have startet med en x-værdi, der var større end a og bevæget os mod a fra højre.

Lad os se på et eksempel, hvor funktionen ikke er kontinuert.



Her kan vi se, at

$$f(a) = 7$$

Men lige meget hvor tæt vi kommer på a med vores x-værdi (gående fra venstre side), så vil funktionsværdien aldrig blive 7. Den vil i stedet nærme sig 4.

$$\lim_{x \to a^-} (f(x)) = 4 \neq 7 = f(a)$$

Bemærk, at hvis vi var startet med en x-værdi, der var større end a og havde nærmet os a fra højre, så ville funktionsværdierne nærme sig $f(a)$. Imidlertid kræves der, at både grænseværdien fra højre og fra venstre giver $f(a)$, før man kan tale om at en funktion er kontinuert.

Muligvis synes du, at det virker som en løs definition, at nogle tal nærmer sig hinanden uendeligt meget. Vi kan berolige med, at der findes en mere stringent definition, nemlig at en funktion er kontinuert hvis:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

men den slags indviklede sager skal du heldigvis ikke bekymre dig om, medmindre du vil studere matematik på universitetet :-)

Differentiabilitet

På B-niveau lærte vi, at en funktion f var differentiabel i et punkt x_0, hvis den var kontinuert, og der gjaldt, at dens differens-kvotient

$$a_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

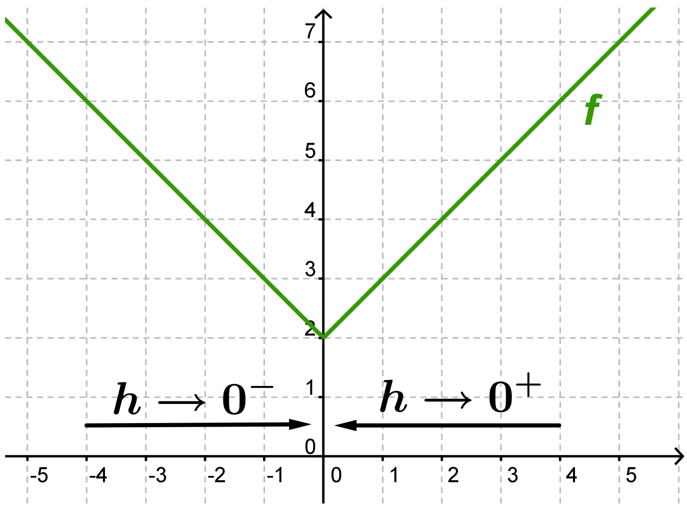
havde en grænseværdi for $h \to 0$

Dette betyder, at der skal være en grænseværdi, både når h nærmer sig 0 fra venstre og fra højre, og at de to grænseværdier skal være den samme.

Lad os se på et eksempel på en funktion, der ikke er differentiabel. Vores funktion er

$$f(x) = |x| + 2$$

Dens graf er



Vi vil se på differentialkvotienten i punktet 0.

Vi bruger tre-trins-reglen.

$$I: \qquad \triangle y = f(x+h) - f(x) = |0+h| + 2 - (|0| + 2) = |h| + 2 - 0 - 2 = |h|$$

$$II: \qquad a_s = \frac{\triangle y}{h} = \frac{|h|}{h}$$

I det tredje trin tager vi grænseværdien for h gående mod 0 både fra højre og fra venstre.

Vi starter med at tage grænseværdien fra højre. Dvs. at h er et positivt tal, så $|h| = h$

$$III(\text{højre}): \qquad \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{|h|}{h}\right) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{h}{h}\right) = \lim_{h\to 0^+}(1) = 1$$

Dernæst tager vi grænseværdien fra venstre. Dvs. at h er et negativt tal, og derfor er $|h| = -h$

$$III(\text{venstre}): \qquad \lim_{h\to 0^-}\left(\frac{|h|}{h}\right) = \lim_{h\to 0^-}\left(\frac{-h}{h}\right) = \lim_{h\to 0^-}(-1) = -1$$

Fra højre er grænseværdien altså 1 og fra venstre er den -1. Da grænseværdien ikke er den samme, er funktionen ikke differentiabel.

Læg mærke til, at dette stemmer overens med vores B-niveau-definition, hvor vi sagde, at differentiable funktioner ikke måtte have nogen "knæk".

4.3 Differentiation af trigonometriske funktioner

På B-niveau-delen af webmatematik.dk så vi hvordan man differentierede forskellige funktioner (se en liste her). Til den liste kan vi nu tilføje de trigonometriske funktioner sinus, cosinus og tangens.

Husk, at når man differentierer eller integrerer de trigonometriske funktioner, så SKAL man regne i radianer. Hvis du bruger en lommeregner til at differentiere for dig, så sørg for, at den er indstillet til at regne i radianer.

I første søjle har vi funktionerne, i anden søjle har vi de afledede funktioner, altså differentialkvotienterne. I tredje søjle har vi stamfunktionerne.

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x) + c$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$	$-\ln(\|\cos(x)\|) + c$

4.4 Integration ved substitution

Man kan differentiere alle differentiable funktioner. Der findes en række regler, og hvis man følger dem til punkt og prikke, kan man finde frem til den rigtige differentialkvotient. Det er ikke helt lige så let at integrere. Så snart man skal integrere et produkt af funktioner eller en sammensat funktion, er der ikke nogen klare regler, man bare kan følge slavisk. I stedet findes der en del forskellige metoder, man kan bruge til at omskrive integralet til noget, der er lettere at have med at gøre. Det er ikke altid til at sige, om den ene eller den anden metode vil virke; man må prøve sig frem.

En af de vigtigste metoder til integration er integration ved substitution.

Hvornår kan integration ved substitution bruges?

Når integranden (indmaden i integralet) indeholder et *produkt* af funktioner, og når en af dem er *sammensat*. Det er ikke i alle disse tilfælde, det vil virke, men ofte er det et forsøg værd.

Hvad er integration ved substitution?

Integration ved substitution er egentlig følgende formler

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt, \qquad \text{hvor } t = g(x)$$

Formlerne ser meget uoverskuelige ud. Imidlertid er metoden ikke så vanskelig i praksis. Vi illustrerer den ved hjælp af nogle eksempler.

Vi ønsker at udregne følgende integral

$$\int x \cdot e^{x^2}\, dx$$

Vi ser, at der både er tale om et produkt af funktioner, og at den ene er sammensat. Derfor prøver vi os frem med integration ved substitution.

Det første, man gør, er at finde den indre funktion i den sammensatte funktion. I vores tilfælde er det x^2. Vi kalder den indre funktion for t.

$$t = x^2$$

Nu differentierer vi t:

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

venstresiden er bare et symbol, der betyder, at vi har differentieret t med hensyn til variablen x.

Imidlertid lades vi som om, at symbolet er en brøk og isolerer dx.

$$dx = \frac{1}{2x} dt$$

Nu sætter vi t ind i integralet samt det nye udtryk for dx.

$$\int x \cdot e^{x^2}\, dx = \int x \cdot e^t \cdot \frac{1}{2x}\, dt$$

Til sidst skal vi reducere integranden, og udføre integrationen.

$$\int x \cdot e^t \cdot \frac{1}{2x}\, dt = \int \frac{1}{2} e^t\, dt = \frac{1}{2} e^t + c$$

Som rosinen i pølseenden substituerer vi den indre funktion tilbage ind på t's plads.

$$\int x \cdot e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

Opsamling

• Find den indre funktion og kald den t • Differentier t, dvs. find dt/dx • Isolér dx • Indsæt nu t samt udtrykket for dx i integralet • Tilbage-substituer den indre funktion på t's plads.

Hvis der er tale om et bestemt integral, skal man huske at integrationsgrænserne også skal substitueres.

Lad os regne følgende eksempel med et bestemt integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^3 \cos(x)\, dx$$

Vi ser, at sin(x) er den indre funktion.

$$t = \sin(x)$$

Vi differentierer t.

$$\frac{dt}{dx} = \cos(x)$$

Vi lades som om symbolet til venstre er en brøk, og isolerer dx.

$$dx = \frac{1}{\cos(x)}dt$$

Nu skal vi finde de nye integrationsgrænser. Det gør vi ved at sætte de gamle grænser ind i den funktion, vi substituerer ud (i vores tilfælde sin(x)).

$$\sin(0) = 0$$

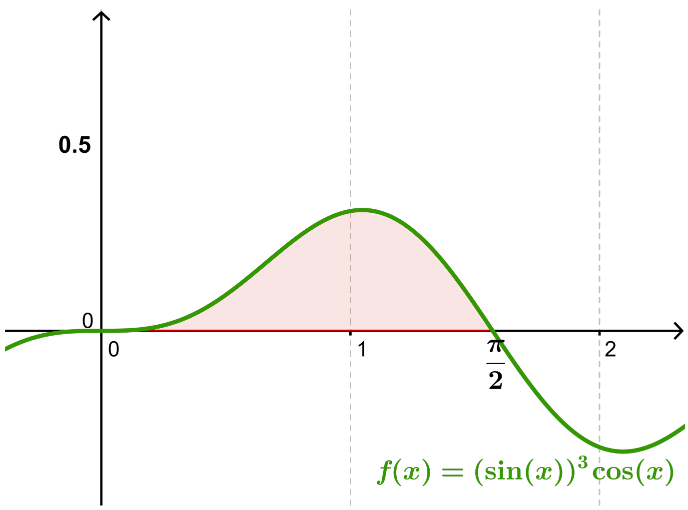
$$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

Nu sætter vi t og udtrykket for dx samt de nye grænser, ind i integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^3 \cdot \cos(x)\, dx = \int_0^1 t^3 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}\, dt$$

Vi ser, at cos(x)'erne går ud med hinanden.

$$\int_0^1 t^3 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}\, dt = \int_0^1 t^3\, dt = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 = \frac{1}{4}$$



Arealet markeret på figuren er altså $\frac{1}{4}$.

4.5 Partiel integration

Som nævnt i sidste afsnit er det ikke muligt at komme med en fremgangsmåde til at løse alle integraler. Alligevel har vi nogle værktøjer, nogle metoder, vi kan prøve os frem med for at løse integraler. Partiel (eller *delvis*) integration er en af disse metoder.

Man bruger partiel integration, når integranden (indmaden i integralet) er et produkt af funktioner.

Den formel, man bruger, når man integrerer partielt er:

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$

Man kan selv vælge, hvilken af de to funktioner, man vil differentiere og hvilken man vil integrere. Dette valg er vigtigt for, om det bliver et pænere eller et grimmere integral, man ender ud med efter den partielle integration.

Et hint er, at hvis der er en funktion af formen x eller x^n, så skal man vælge at differentiere den.

Vi tager et eksempel med et ubestemt integral

$$\int 2x \cdot \cos(x)\,dx$$

Vi vælger at det er 2x, der skal differentieres, mens cos(x) skal integreres.

Vi starter med at skrive de fire størrelser op:

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = \cos(x), \quad f'(x) = 2, \quad G(x) = \sin(x)$$

Nu sætter vi dem ind i formlen

$$\int 2x\cos(x)\,dx = 2x \cdot \sin(x) - \int 2 \cdot \sin(x)\,dx$$

Det integral, vi har på højre side kan vi sagtens udregne.

$$\int 2x\cos(x)\,dx = 2x \cdot \sin(x) - \int 2 \cdot \sin(x)\,dx$$

$$= 2x \cdot \sin(x) - 2 \cdot (-\cos(x)) + c = 2x \cdot \sin(x) + 2\cos(x) + c$$

Vi tager også et eksempel med et bestemt integral, hvor vi skal bruge partiel integration 2 gange, før det giver noget resultat.

$$\int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

Vi vælger, at vi vil differentiere x^2 og integrere $e^{x/2}$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = e^{\frac{x}{2}}, \quad f'(x) = 2x, \quad G(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$$

Nu sætter vi ind i formlen

$$\int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx \;= [x^2 \cdot 2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\,dx = [2x^2 e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 4x \cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

Det integral, vi er nået frem til på højre side, kan vi endnu ikke udregne. Derfor bruger vi partiel integration endnu engang.

$$h(x) = 4x, \quad k(x) = e^{\frac{x}{2}}, \quad h'(x) = 4, \quad K(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$$

Vi indsætter i formlen og får

$$[2x^2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 4x \cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx = [2x^2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \left([4x \cdot 2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 4 \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\,dx\right)$$

Det sidste integral består kun af en enkelt funktion, og den kan vi sagtens integrere.

Alt i alt får vi:

$$\int_0^1 x^2e^{\frac{x}{2}}\,dx = [2x^2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \left([4x \cdot 2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 4 \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\,dx\right)$$

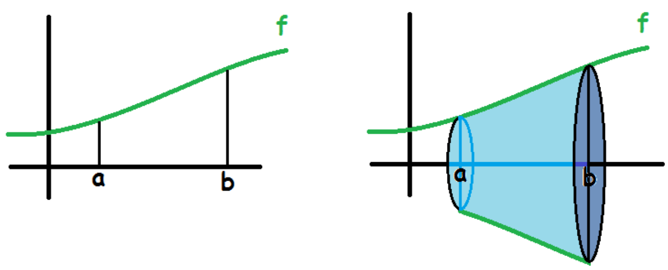
$$= [2x^2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - [8x \cdot e^{\frac{x}{2}}]_0^1 + 16e^{\frac{x}{2}}]_0^1$$

$$= (2 \cdot 1 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 0 \cdot e^0) - (8 \cdot 1 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 8 \cdot 0 \cdot e^0) + (16e^{\frac{1}{2}} - 16e^0)$$

$$= 2e^{\frac{1}{2}} - 8e^{\frac{1}{2}} + 16e^{\frac{1}{2}} - 16 = 10e^{\frac{1}{2}} - 16 = 10\sqrt{e} - 16$$

4.6 Omdrejningslegemer

Et omdrejningslegeme (eller et rotationslegeme) er den tredimensionale figur, man får, hvis man roterer en funktion 360 grader rundt om x-aksen. Det er vigtigt, at funktionen er kontinuert, og at den kun har positive værdier.



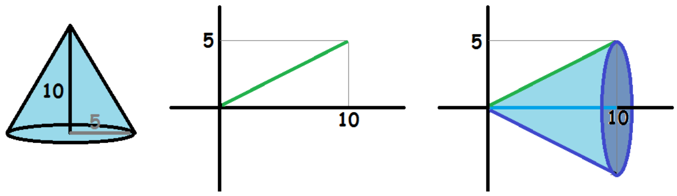
Man kan beregne volumen af omdrejningslegemet ved hjælp af følgende formel

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Lad os regne nogle eksempler.

Vi ønsker at beregne volumen af keglen med højde 10 og radius 5.

Vi indtegner siden af keglen i et koordinatsystem som vist nedenfor



Vi har to punkter på grafen, (0, 0) og (10,5), så vi kan bestemme den lineære funktions forskrift

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-0}{10-0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

og, da vi har lagt funktionen, så den skærer akserne i (0, 0), så er b=0.

Altså er

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

Vi er interesserede i intervallet [0;10]. Nu sætter vi ind i formlen for volumen af omdrejningslegeme:

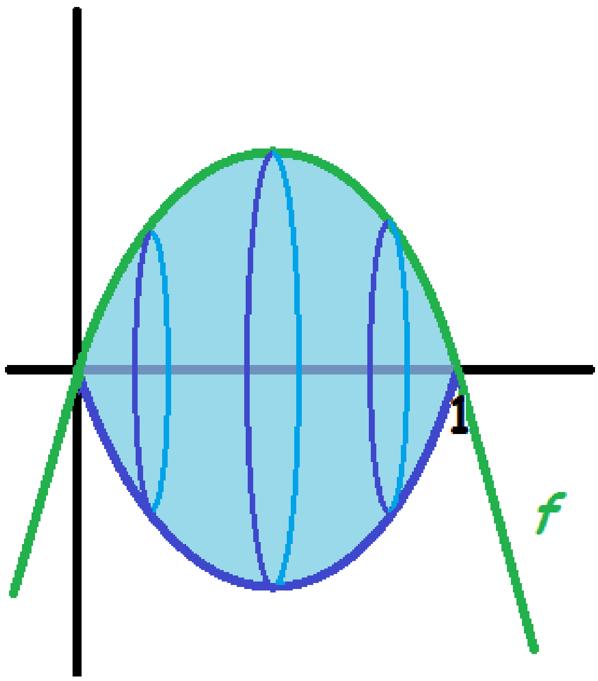
$$\begin{aligned} V = \pi \int_0^{10} (\frac{1}{2}x)^2 \, dx &= \pi \int_0^{10} \frac{1}{4}x^2 \, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{10} \\ = \pi \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 1000 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) &= \frac{1000\pi}{12} \approx 261,8 \end{aligned}$$

Vi tager et andet eksempel.

Vi vil rotere andengradspolynomiet

$$f(x) = -5x^2 + 5x = -5x(x-1)$$

om x-aksen mellem dets to rødder 0 og 1.



Mellem de to rødder er polynomiet positivt, så derfor må vi benytte vores formel.

$$V = \pi \int_0^1 (-5x(x-1))^2 \, dx$$

Først regner vi lidt på integranden (indmaden i integralet) ved hjælp af potensregler og kvadratsætninger.

$$(-5x(x-1))^2 = (-5x)^2(x-1)^2$$
$$= 25x^2(x^2+1-2x) = 25x^4 + 25x^2 - 50x^3$$

Nu er vi klar til at udregne integralet.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 25x^4 + 25x^2 - 50x^3 \, dx \\ &= \pi \left[\frac{25}{5}x^5 + \frac{25}{3}x^3 - \frac{50}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \pi \left(5 \cdot 1^5 + \frac{25}{3} \cdot 1^3 - \frac{50}{4} \cdot 1^4 - 0 \right) \\ &= \pi \left(\frac{5 \cdot 12}{12} + \frac{25 \cdot 4}{12} - \frac{50 \cdot 3}{12} \right) \\ &= \pi \left(\frac{60 + 100 - 150}{12} \right) = \frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6} \approx 2,618 \end{aligned}$$

5 Differentialligninger

5.1 Hvad er differentialligninger?

En differentialligning er kort og godt en ligning, hvor der indgår en differentieret funktion som en af de ubekendte.

Løsningen til en differentialligning er de funktioner, der får ligningen til at være sand. Vi leder altså ikke efter talløsninger som i almindelige ligninger, men efter funktioner, der opfylder, at hvis man indsætter dem og deres afledede (differentierede), så står der det samme på begge sider af lighedstegnet. Eftersom løsningen er en funktion, så må den godt afhænge af en anden variabel (for det meste x).

Der er forskellig notation for den differentierede funktion i differentialligninger. Det kan f.eks. være

$$y' \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y \qquad f'(x) \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$$

Men de to første, er de mest almindelige.

Partikulær løsning og fuldstændig løsning

Lad os se på en meget simpel differentialligning

$$y' = 5$$

Ved at integrere på begge sider, får vi, at

$$y = f(x) = 5x$$

er en løsning til differentialligningen. Men

$$y = f(x) = 5x + 8$$

er også en løsning til differentialligningen.

Disse to løsninger, kalder man *partikulære løsninge*r. Der er nemlig uendeligt mange løsninger til differentialligningen, og disse to er blot nogle af løsningerne.

Den *fuldstændige løsning* på differentialligningen ville være

$$y = f(x) = 5x + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ved at indsætte forskellige tal på c's plads, finder man de partikulære løsninger.

Ofte vil en opgave stilles med en startbetingelse, der afgør hvilken af de partikulære løsninger, man er på udkig efter.

F.eks.

$$y' = 5, \qquad y(2) = 4$$

Først finder vi den fuldstændige løsning

$$y = f(x) = 5x + c$$

og så finder vi den partikulære løsning ved at indsætte punktet $(2, 4)$ i ligningen og isolere c.

$$\begin{aligned}
&4 = 5 \cdot 2 + c \Leftrightarrow \\
&4 = 10 + c \Leftrightarrow \\
&c = -6.
\end{aligned}$$

Altså er løsningen til den givne opgave

$$y = f(x) = 5 \cdot x - 6$$

5.2 Gøre prøve

Ofte bliver man ikke bedt om at finde en løsning til en differentialligning, men bliver i stedet præsenteret for en funktion og spurgt om den løser differentialligningen.

Metoden til at bestemme dette kaldes ”at gøre prøve”.

Den går simpelthen ud på at indsætte funktionen på hhv. venstre- og højresiden og se om det giver det samme.

Eksempel

Vi ønsker at undersøge om ligningen

$$f(x) = 2e^{16x}$$

er en løsning til differentialligningen

$$y' = 16y.$$

Først differentierer vi f.

$$f'(x) = 16 \cdot 2 \cdot e^{16x} = 32e^{16x}$$

Først udregner vi venstresiden.

$$V: \quad f'(x) = 32e^{16x}$$

og så udregner vi højresiden

$$H: \quad 16 \cdot f(x) = 16 \cdot \underbrace{2e^{16x}}_{f(x)} = 32e^{16x}$$

Da højre- og venstresiden er ens, betyder det, at funktionen f er en løsning til differentialligningen.

Eksempel 2

Afgør om

$$g(x) = 2 + 5e^{-3x}$$

er en løsning til differentialligningen

$$y' - 6 = -3y.$$

Før vi indsætter g i differentialligningen, differentierer vi den lige

$$g'(x) = -3 \cdot 5e^{-3x} = -15e^{-3x}.$$

Så gør vi prøve på samme måde som før, ved først at indsætte på venstresiden, så på højresiden og til sidst sammenligner vi resultater

$$V: \quad g'(x) - 6 = -15e^{-3x} - 6,$$

$$H: \quad -3 \cdot g(x) = -3 \cdot (2 + 5e^{-3x}) = -6 - 15e^{-3x}.$$

Da venstre- og højresiden er ens, betyder det, at g er en løsning til differentialligningen.

5.3 Løsninger til differentialligninger

Herunder følger et skema over forskellige differentialligninger og deres fuldstændige løsninger.

I de næste par afsnit vil vi gå mere i dybden med nogle af de forskellige typer. Dette skal altså mest ses som en oversigt.

differentialligning	fuldstændige løsning
$y' = k$	$y = k \cdot x + c$
$y' = h(x)$	$y = \int h(x)\,\mathrm{d}x$
$y' = k \cdot y$	$y = c \cdot e^{kx}$
$y' = b - ay$	$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$
$y' = y \cdot (b - ay)$	$y = \frac{b/a}{1+c \cdot e^{-bx}}$
$y' = ay \cdot (M - y)$	$y = \frac{M}{1+c \cdot \exp(-a \cdot M \cdot x)}$
$y' + a(x) \cdot y = b(x)$	$y = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)}\,\mathrm{d}x + c \cdot e^{-A(x)}$

Skemaet skal forstås på den måde, at c er en konstant, som afhænger af hvilken begyndelsesbetingelse, vi har fået (se evt. afsnittet om partikulære og fuldstændige løsninger)

I den nederste linje er $a(x)$ og $b(x)$ to funktioner, der afhænger af x (dvs. der kun indgår faste tal og x'er i udtrykkene). $A(x)$ skal forstås som en (vilkårlig) stamfunktion til $a(x)$.

For at forstå, hvordan skemaet fungerer, kommer vi med et par eksempler.

Eksempel 1

Hvis vores differentialligning er

$$y' = 5y \cdot (2 - y)$$

så siger skemaet (næstsidste linje), at den fuldstændige løsning er

$$y = f(x) = \frac{2}{1 + c \cdot e^{5 \cdot (-2) \cdot x}} = \frac{2}{1 + ce^{-10x}}$$

Eksempel 2

Hvis vores differentialligning havde været

$$y' + 6x \cdot y = 18x$$

så siger skemaet (sidste linje) at

$$y = f(x) = e^{-3x^2} \int 18x \cdot e^{3x^2} \, \mathrm{d}x + ce^{-3x^2} = e^{-3x^2} \int 3 \cdot e^t \, \mathrm{d}t + ce^{-3x^2}$$
$$= e^{-3x^2} \cdot 3e^{3x^2} + ce^{-3x^2} = 3e^0 + ce^{-3x^2} = 3 + ce^{-3x^2}$$

Her har vi bl.a. substitueret $t = 3x^2$, $\mathrm{d}t = 6x\,\mathrm{d}x$ for at løse integralet.

5.4 Eksponentiel vækst

En vigtig type differentialligning er på formen

$$y' = ky.$$

Nogle gange optræder den på formen

$$\frac{y'}{y} = k,$$

men det ses let, at de to differentialligninger er ens (man skal bare gange med y på begge sider af lighedstegnet).

Eksempler på denne type differentialligninger er

$$y' = 2y, \qquad \frac{y'}{y} = 8, \qquad \frac{dy}{dx} = 17y$$

Den fuldstændige løsning til denne type differentialligning er

$$y = f(x) = ce^{kx}$$

Eksempel

Hvis vores ligning havde været

$$y' = 2y$$

så ville den fuldstændige løsning være

$$y = f(x) = ce^{2x}$$

Hvis vi oveni havde fået begyndelsesbetingelsen $y(0) = 8$, kunne vi bestemme c således

$$8 = ce^{2\cdot 0} \qquad \Leftrightarrow \qquad c = 8.$$

Altså ville den partikulære løsning være

$$y = f(x) = 8e^{2x}$$

Vi ser at løsningerne til differentialligningen er eksponentialfunktioner med startværdi c og fremskrivningsfaktor e^k.

Derfor siger man, at disse differentialligninger beskriver *eksponentiel vækst*.

5.5 Forskudt eksp. vækst

En anden vigtig type af differentialligninger er på formen

$$y' = b - ay$$

hvor a og b er konstanter.

Den kan eksempelvis optræde som

$$\frac{dy}{dx} = b - ay, \qquad y' + ay = b.$$

Eksempler på differentialligninger af denne type er

$$y' = 8 - 2y, \qquad \frac{dy}{dx} + 7y = 37, \qquad y' - 15y = 17.$$

Den fuldstændige løsning til disse differentialligninger er

$$y = f(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax}$$

Eksempel

Hvis vi vil løse differentialligningen

$$y' = 3 - 5y$$

er den fuldstændige løsning altså

$$y = f(x) = \frac{3}{5} + ce^{-5x} = 0{,}6 + ce^{-5x}$$

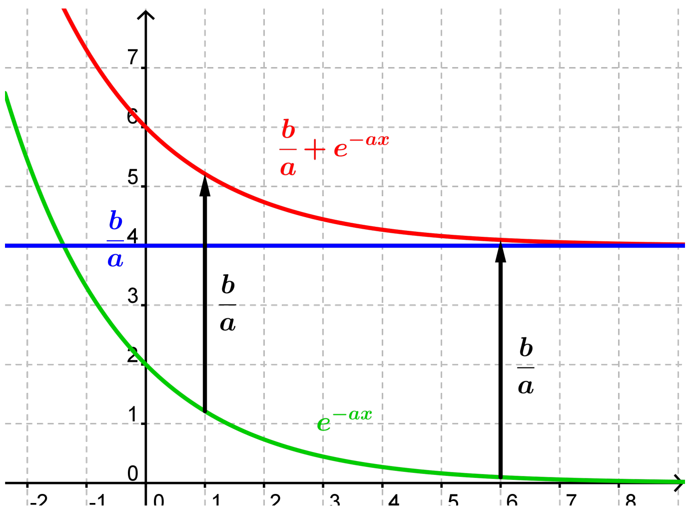
Havde vi fået startbetingelsen $y(0) = 14$, ville vi kunne isolere c

$$14 = 0{,}6 + ce^{-5 \cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad 14 = 0{,}6 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = 13{,}4$$

Den partikulære løsning ville så være

$$y = f(x) = 0{,}6 + 13{,}4e^{-5x}$$

Bemærk, at løsningerne til denne type differentialligninger er forskudte eksponentialfunktioner. Dvs. eksponentialfunktioner, hvis grafer er forskudt lodret.



Newtons afkølingslov

Differentialligninger af formen

$$y' = b - ay$$

har en nær sammenhæng med Newtons afkølingslov.

Newtons afkølingslov siger

"Hastigheden hvormed temperaturen af et legeme ændres, er proportional med forskellen mellem legemets temperatur og det omgivende rums temperatur".

Hvis vi f.eks. har en kop skoldhed te, som vi stiller i et rum med stuetemperatur, så vil den afkøles hurtigt i starten (hvor forskellen mellem teens og rummets temperatur er stor), mens den efter et stykke tid kun vil afkøles langsomt (hvor forskellen mellem teens og rummets temperatur er lille).

Lad os prøve at skrive Newtons afkølingslov om til en differentialligning.

Differentialkvotienter siger noget om funktioners hastighed. "Hastigheden hvormed temperaturen af et legeme ændres" kan vi derfor omskrive til y'. Hvis vi kalder rummets temperatur for T, så kan "forskellen mellem legemets temperatur og det omgivende rums temperatur" omskrives til $(T - y)$.

At to ting er proportionale betyder, at der findes en konstant, a, så den ene er lig med a ganget med den anden (dvs. den ene er a gange større end den anden).

Nu siger vores differentialligning

$$y' = a(T - y)$$

Hvis vi ganger parentesen ud, får vi

$$y' = aT - ay$$

Det minder meget om vores differentialligning for forskudt eksponential vækst. Den eneste forskel er, at den konstant, vi kaldte b, her hedder $a \cdot T$.

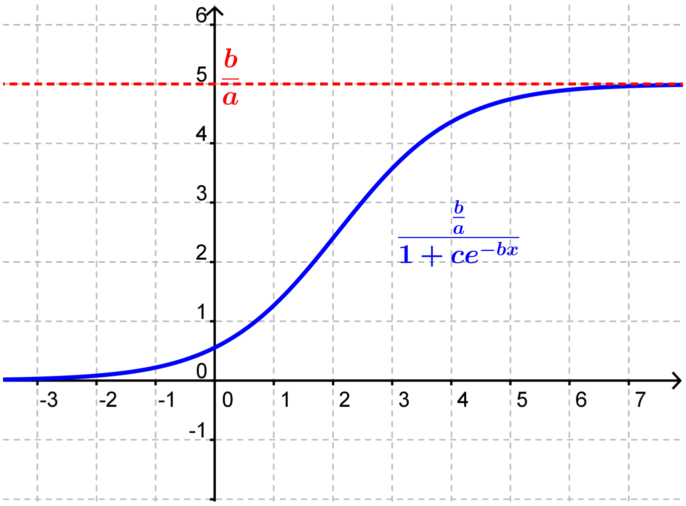
Løsningen (dvs. den funktion, der beskriver hvordan temperaturen af legemet ændrer sig ifht. tiden) kan skrives som

$$y = f(t) = \frac{b}{a} + ce^{-a \cdot t} = \frac{a \cdot T}{a} + ce^{-a \cdot t} = T + ce^{-a \cdot t}$$

For at kunne bestemme c og a skal man have to begyndelsesbetingelser (f.eks. begyndelsestemperaturen og temperaturen efter en time)

5.6 Logistisk vækst

En logistisk vækst er kendetegnet ved, at der er tale om en begrænset vækst. Der er altså et maksimum for, hvor funktionen kan vokse til. I starten vokser den med noget, der minder om en eksponentiel udvikling, men når den så nærmer sig sit maksimum, flader den ud.



Logistisk vækst bruges til at lave modeller over eksempelvis dyreverdenen. Hvis man sætter 10 kaniner ud på en ø, vil de til at starte med formere sig utroligt meget (høj væksthastighed). Når antallet af kaniner når en vis størrelse, vil øen ikke længere have mad nok til at brødføde alle kaninerne, og derfor vil væksthastigheden stilne af (kurven bliver fladere).

Differentialligningen

Logistisk vækst udtrykkes med differentialligningen

$$y' = y(b - ay)$$

Bemærk, at hvis man ganger parentesen ud, så får man en andengradsligning.

$$y' = b \cdot y - a \cdot y^2$$

Eksempler på denne type differentialligning er

$$y' = y(5 - 2y), \qquad y' = 10y - 3y^2, \qquad \frac{dy}{dx} = y \cdot (4 - 4y).$$

Løsningen på ligningen er

$$y = f(x) = \frac{\frac{b}{a}}{1 + ce^{-b \cdot x}}$$

Eksempel

Hvis vores differentialligning er

$$y' = y \cdot (10 - 5y)$$

så er løsningen

$$y = f(x) = \frac{\frac{10}{5}}{1 + ce^{-10x}} = \frac{2}{1 + ce^{-10x}}$$

Når x vokser, vil eksponentialfunktionen i nævneren nærme sig 0. Dermed vil hele nævneren nærme sig 1, og brøken vil dermed være lig med tælleren b/a. Funktionerne vil altså vokse noget nært eksponentielt i starten men så flade ud og nærme sig b/a.

Nært beslægtet differentialligning

I differentialligningen ovenfor, så vi at løsningerne ville smyge sig op ad b/a. Dette kaldes populationens "steady state", og beskriver den øvre grænse for populationen. Tit kender man "steady state", og derfor ville det være smart, hvis man kunne indsætte/aflæse det direkte i differentialligningen.

Hvis vi kalder "steady state"for M, så har vi, at:

$$M = \frac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad b = a \cdot M$$

Hvis vi indsætter det i differentialligningen ovenfor, får vi

$$y' = y \cdot (aM - ay) = ay \cdot (M - y)$$

og løsningen bliver

$$y = f(x) = \frac{M}{1 + ce^{-aMx}}$$

Egentlig er der tale om den samme differentialligning som før, men hvor vi bare kan aflæse M i stedet for b ud fra differentialligningen.

Uddybende forklaring til løsningen

Løsning af den logistiske differentialligning: y' = y(b-a y):

$y' = \frac{dy}{dx} = y(b - ay) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(b-ay)} = dx;$

der integreres på begge side og integrations konstanten adderes

$\int \frac{1}{y(b-ay)} dy = x + c$

Brøken adskilles i to brøker, det antages at

$\frac{1}{y(b-ay)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{b-ay} = \frac{A(b-ay)+By}{y(b-ay)}$

Tælleren skal jo blive 1 og dermed $A(b - ay) + By = 1$.

Dette giver to ligninger $Ab = 1$ og $-aAy + By = 0$ hvoraf $A = \frac{1}{b}$ og $-aA + B = 0 \Leftrightarrow B = aA = \frac{a}{b}$.

Det vil sige

$\int \frac{1}{y(b-ay)} dy = \int \frac{1}{by} dy + \int \frac{a}{b(b-ay)} dy$
$= \frac{\log(y)}{b} - \int \frac{1}{b(b-ay)} d(b - ay)$
$= \frac{\log(y)}{b} - \frac{\log(b-ay)}{b} = \frac{\log(\frac{y}{b-ay})}{b} = x + c$

Eksponential funktionen tages på begge sider $\frac{y}{b-ay} = Exp(bx + bc)$ fra dette udtryk isoleres y

$y = \frac{b \exp(bx+bc)}{1+a \exp(bx+bc)} = \frac{b/a}{1+C \exp(-bx)}$ hvor den nye integrations konstant er C.

($C = \exp(-bc)/a$)

5.7 Inhomogene lineære førsteordens differentialligninger

Den absolut sværeste differentialligning, du kommer til at møde i gymnasiet er af formen

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

Den kaldes en *inhomogen lineær førsteordens differentialligning.* Inhomogen hentyder til, at højresiden er forskellig fra 0. Ordenen af differentialligningen er den højest afledede (her y', men i en andenordens differentialligning ville y" også optræde).

Et eksempel på en inhomogen lineær førsteordens differentialligning er

$$y' + e^{35x}y = \cos(x)$$

Her er

$$a(x) = e^{35x}$$

$$b(x) = \cos(x)$$

Et andet eksempel kunne være

$$y' + \ln(44x - \sin(x)) \cdot y = 1$$

Her er

$$a(x) = \ln(44x - \sin(x))$$

mens b(x) er konstant lig med 1.

Løsningen til den inhomogene lineære førsteordens differentialligning er

$$y = f(x) = e^{-A(x)} \cdot \int (b(x) \cdot e^{A(x)})\, dx + ce^{-A(x)}$$

Hvor A(x) er en vilkårlig stamfunktion til a(x).

Problemet med løsningsformlen er, at integralet kan være svært at udregne. Det er ikke altid, det overhovedet lader sig gøre. Men i visse tilfælde kan vi udregne det og nå frem til differentialligningens løsninger.

Her kommer to eksempler på lineære inhomogene førsteordens differentialligninger og deres løsninger.

Eksempel 1

$$y' + 4x^3y = 16x^3$$

Vi ser først, at

$$a(x) = 4x^3$$

og vi udregner stamfunktionen

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int 4x^3\, dx = \frac{1}{4} \cdot 4x^4 = x^4$$

Nu indsætter vi i løsningsformlen

$$y = f(x) = e^{-x^4} \int (16x^3 e^{x^4})\, dx + ce^{-x^4}$$

For at udregne integralet, bruger vi integration ved substitution

Vi sætter

$$t = x^4$$

dermed bliver

$$\frac{dt}{dx} = 4x^3$$

$$dt = 4x^3 dx$$

$$4dt = 16x^3 dx$$

Dette sætter vi nu ind i integralet.

$$y = f(x) = e^{-x^4} \int (16x^3 e^{x^4})\, dx + ce^{-x^4} = e^{-x^4} \int 4e^t\, dt + ce^{-x^4}$$

$$= e^{-x^4} \cdot 4e^t + ce^{-x^4}$$

Nu mangler vi bare at substituere tilbage og reducere en smule.

$$y = f(x) = e^{-x^4} \cdot 4e^{t} + ce^{-x^4} = e^{-x^4} \cdot 4e^{x^4} + ce^{-x^4}$$

$$= 4e^{x^4 - x^4} + ce^{-x^4} = 4e^0 + ce^{-x^4} = 4 + ce^{-x^4}$$

Eksempel 2

$$y' + \frac{y}{x} = \sin(x)$$

Her er

$$a(x) = \frac{1}{x}, \quad b(x) = \sin(x)$$

Vi starter med at udregne A(x)

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)$$

Nu indsætter vi i løsningsformlen:

$$y = f(x) = e^{-\ln(x)} \int \sin(x) e^{\ln(x)}\, dx + ce^{-\ln(x)}$$

Før vi reducerer løsningen, husker vi på logaritmeregnereglerne, der giver

$$-\ln(x) = 0 - \ln(x) = \ln(1) - \ln(x) = \ln(\frac{1}{x})$$

Derved er løsningen

$$y = f(x) = e^{\ln(\frac{1}{x})} \int \sin(x) e^{\ln(x)}\, dx + c e^{\ln(\frac{1}{x})}$$

Nu husker vi på, at e^x og ln(x) er omvendte funktioner, så de ophæver hinanden.

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \int \sin(x) \cdot x\, dx + \frac{c}{x}$$

Nu løser vi integralet vha. partiel integration.

$$\int \overbrace{\sin(x)}^{g(x)} \cdot \overbrace{x}^{f(x)}\, dx = \overbrace{x}^{f(x)} \cdot \overbrace{(-\cos(x))}^{G(x)} - \int \overbrace{1}^{f'(x)} \cdot \overbrace{(-cos(x))}^{G(x)}\, dx$$

$$= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\, dx$$

$$= -x \cdot \cos(x) + \sin(x)$$

Når vi sætter dette ind på integralets plads i formlen, når vi frem til vores løsning.

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \int \sin(x) \cdot x\, dx + \frac{c}{x}$$

$$= \frac{1}{x} (-x \cos(x) + \sin(x)) + \frac{c}{x}$$

$$= -\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x} + \frac{c}{x}$$

Specialtilfælde

Mange af de øvrige differentialligninger, vi har beskæftiget os med, er specialtilfælde af den inhomogene lineære førsteordens differentialligning.

Hvis funktionerne a(x) og b(x) begge er konstante, så bliver vores differentialligning

$$y' + a \cdot y = b$$

og hvis vi omformer den, får vi

$$y' = b - a \cdot y$$

som er differentialligningen for forskudt eksponentiel vækst, med løsningen

$$y = f(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax}$$

Hvis a er konstant og b(x)=0, får vi

$$y' + ay = 0$$

hvilket er det samme som

$$y' = -ay$$

som er differentialligningen for eksponentiel vækst, med løsningen

$$y = f(x) = ce^{-ax}$$

Hvis a(x)=0, og b(x) er en hvilken som helt funktion, får vi

$$y' = b(x)$$

som har løsningen

$$y = f(x) = \int b(x)\,dx$$

5.8 Separation af variable

Separation af variable er en metode til at løse differentialligninger, hvor y' er ganget med en funktion, der har med y at gøre.

Vi taler om differentialligninger på formen

$$y' \cdot f(y) = g(x)$$

Nogle eksempler på denne type differentialligninger er

$$\sin(y) \cdot y' = 5x^2$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos(x) + 8$$

$$(y^2 + 7\ln(y)) \cdot y' = \frac{\cos(x)}{e^x}$$

Man kan også være ude for, at man skal rykke lidt rundt på differentialligningen for at få den på den rigtige form.

Havde vi f.eks. differentialligningen

$$y' = y^3 \cdot x^2$$

så kunne vi rykke y^3 hen på venstre side (ved at dividere med det på begge sider af lighedstegnet).

Så ville vi få denne ligning:

$$\frac{1}{y^3} \cdot y' = x^2$$

Her er $f(y)=1/y^3$, og $g(x)=x^2$.

Separation af variable går ud på, at man må integrere på begge sider af lighedstegnet. Man integrerer f(y) mht y, og g(x) mht x.

$$f(y) \cdot y' = g(x) \quad \Rightarrow \quad \int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

Bemærk, at y' forsvinder, når vi integrerer.

Hvorfor ser formlen sådan ud?

Formlen bliver lettere at huske, hvis man omskriver y' på denne måde:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Så siger vores differentialligning

$$f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$$

Vi integrerer mht x på begge sider

$$\int f(y) \cdot \frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)\,dx$$

Ligesom ved substitutionsmetoden lader vi som om

$$\frac{dy}{dx}$$

er en brøk, selvom det bare er et symbol.

$$\int f(y) \cdot \frac{dy}{\color{red}{dx}}\,\color{red}{dx} = \int g(x)\,dx$$

Nu går de to røde dx'er ud med hinanden, og vi står tilbage med

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

Ovenstående er ikke et bevis, men snarere en slags argumentation for, hvorfor formlen ser ud, som den gør.

Lad os nu i stedet prøve at bruge formlen i praksis.

Eksempler

Eksempel 1

Vores differentialligning er

$$y^2 \cdot y' = 3x^2 + 5$$

Her er f(y)=y^2 og g(x)=$3x^2$+5

Nu må vi integrere venstresiden (pånær y') mht y og højresiden mht x.

$$\int y^2 \, dy = \int 3x^2 + 5 \, dx$$

Vi udregner integralerne og får

$$\frac{1}{3}y^3 = x^3 + 5x + c$$

Man behøver ikke sætte en integrationskonstant på hver side. Det er nok, at sætte den på højresiden.

Vi er interesserede i at bestemme y, så der er stadig lidt arbejde tilbage med at isolere y.

Først ganger vi ligningen igennem med 3.

$$y^3 = 3x^3 + 15x + c$$

Det er ligegyldigt at gange konstanten med 3, da en konstant ganget med en konstant bare giver en ny konstant.

Nu tager vi kubikroden (den tredje rod) på begge sider af lighedstegnet:

$$y = \sqrt[3]{3x^3 + 15x + c}$$

og nu har vi vores løsning.

Eksempel 2

Et andet eksempel er differentialligningen

$$y' = 2x \cdot y$$

Vi starter med at rykke y hen på venstresiden:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2x$$

Nu integrerer vi på begge sider

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int 2x \, dx$$

Ved at udregne begge integraler, får vi

$$\ln(|y|) = x^2 + c$$

For at komme af med den naturlige logaritme, husker vi på, at e^x og ln(x) er omvendte funktioner. Så vi sætter venstre- hhv. højresiden som eksponenter i potenser med e som grundtal.

$$e^{\ln(|y|)} = e^{x^2+c}$$

Da e og ln "spiser hinanden"har vi kun —y— tilbage på venstresiden:

$$|y| = e^{x^2+c}$$

Nu husker vi på vores potensregneregler, og omskriver højresiden

$$|y| = e^{x^2} \cdot e^c$$

Nu ophæver vi de numeriske tegn ved at sætte et "plus-minus-tegn på højresiden

$$y = \pm e^c \cdot e^{x^2}$$

Til sidst ser vi, at e^c bare er en (positiv) konstant. Og når vi tager plus-minus-tegnet med, så får vi bare, at det kan skrives som en vilkårlig konstant, k. Derfor er løsningen

$$y = k \cdot e^{x^2}$$

6 Integralregning

I kapitlet om integral regning lærer vi om stamfunktioner, det ubestemte integral, regnereglerne for integraler, det bestemte integral samt arealet af en funktion og mellem to funktioner.

6.1 Hvad går integralregning ud på?

Integration i matematik er noget helt andet end integration i andre sammenhænge. Matematisk integration kan ses som modstykket til differentiation. I differentialregning ønskede vi at finde en afledet funktion ud fra en givet funktion. Integralregning går den modsatte vej af differentialregning. Her er man givet en funktion, som man antager allerede er en afledet funktion. Med integralregning ønsker vi at finde den funktion, stamfunktionen, som vores givne funktion er afledet fra.

Differentialregning er et håndværk med nogle klare regler, som - hvis de følges korrekt - giver mulighed for at differentiere alle (differentiable) funktioner. I modsætning til dette kan integralregning karakteriseres som en "kunstart". Der er ikke på samme måde klare regler, der giver en fremgangsmåde til at løse alle integraler.

I stedet består integralregning af en række forskellige metoder, man kan forsøge sig med, når man ønsker at løse et integral.

Integralregning har stor betydning indenfor bl.a. statistik, fysik og kemi.

6.2 Stamfunktion

Stamfunktion

Stamfunktioner betegnes ofte med store bogstaver. Hvis vores oprindelige funktion hedder f, betegner vi således dens stamfunktion(er) med F. Det, der skal til for at være en stamfunktion, er, at hvis man differentierer stamfunktionen, får man den oprindelige funktion.

Man kan med andre ord sige, at F er en stamfunktion til f hvis

$$F'(x) = f(x)$$

Hvis man får givet funktionen

$$f(x) = 2x + 1$$

kan man gætte sig frem til, at en stamfunktion til f er

$$F(x) = x^2 + x$$

Dette skyldes, at

$$F'(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1 = f(x)$$

og det var jo netop det, der skulle til for, F var en stamfunktion til f. På samme måde kan man sige, at

$$F(x) = 2x^3 + 4x$$

er stamfunktion til

$$f(x) = 6x^2 + 4$$

fordi

$$F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 2 \cdot 3x^{3-1} + 4 = 6x^2 + 4 = f(x)$$

Uendeligt mange stamfunktioner

Hvis man differentierer

$$x^2$$

får man

$$2x$$

Derfor er x^2 stamfunktion til 2x.

Hvis man differentierer

$$x^2 + 4$$

får man imidlertid også

$$2x$$

det vil sige at x^2+4 også er en stamfunktion til 2x

Hvad ville der ske, hvis man differentierede x^2+5? x^2-788? Man ville få 2x i alle tilfælde. Dette skyldes, at konstanterne forsvinder (bliver til 0) når man differentierer. Lige meget hvilken konstant, vi smider på x^2, vil det altså blive en stamfunktion til 2x.

Funktionen

$$f(x) = 2x$$

har altså uendeligt mange stamfunktioner. De minder allesammen meget om hinanden. De indeholder alle sammen x^2, og det eneste, der adskiller dem, er en konstant. Derfor kan vi være smarte og skrive alle stamfunktionerne på én gang som

$$F(x) = x^2 + k$$

hvor k er en konstant.

Integrationsprøven

Hvis man er i tvivl om man er kommet frem til den rigtige stamfunktion, findes der en måde at prøve det efter på. Man differentierer simpelthen bare den formodede stamfunktion og ser, om man får den oprindelige funktion frem. Denne metode (som egentlig bare er definitionen på hvad en stamfunktion er) er så nyttig, at den har fået sit eget navn: Integrationsprøven.

Eksempelvis kunne man blive bedt om at afgøre om

$$F(x) = 2x^2 + 3x^3$$

er stamfunktion til

$$f(x) = 4x + 10x^2$$

Vi tester det vha. integrationsprøven:

$$F'(x) = 2 \cdot 2x^{2-1} + 3 \cdot 3x^{3-1} = 4x + 9x^2 \neq f(x)$$

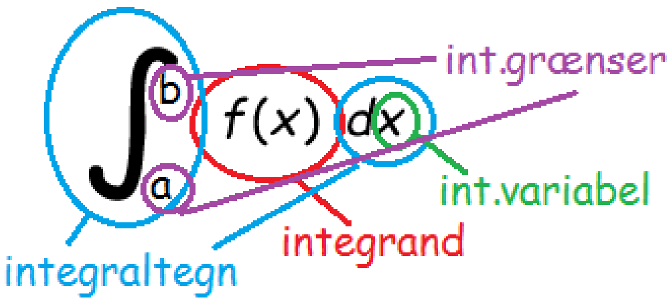
Da vi ikke nåede frem til f, er F ikke stamfunktion til f.

6.3 Ubestemt integral

Før vi går i gang med at definere bestemte og ubestemte integraler vil vi gennemgå lidt notation og terminologi.

For at vide, at man skal integrere en funktion, markerer man det med et integraltegn. Et integraltegn består af to dele. Til venstre skriver man et "langt s"og til højre skriver man et "d"efterfulgt af den variabel, man integrerer med hensyn til (oftest bare dx). S'et såvel som dx er bare rene symboler.

Imellem dem står den funktion, man ønsker at integrere. Denne kaldes *integranden*, men omtales tit som "indmaden". De bestemte integraler har derudover en øvre og en nedre integrationsgrænse, som man skriver ved hhv. top og bund af det lange s.



Ubestemt integral

I forrige afsnit definerede vi, hvad en stamfunktion er. At finde det ubestemte integral til en funktion f er simpelthen bare at bestemme en stamfunktion til f. Skrevet matematisk:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$$

Dette læses som "det ubestemte integral af f (mht. x) er lig med en stamfunktion til f".

Man skal huske at tilføje en konstant til den stamfunktion, man finder. På den måde har man nemlig skrevet alle stamfunktionerne op på én gang.

Lad os finde nogle ubestemte integraler.

Hvis

$$f(x) = x$$

så er

$$F(x) = \int x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + k \ .$$

Vi tjekker om det er rigtigt vha. integrationsprøven

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + k\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x^{2-1} + 0 = \frac{2}{2}x = x = f(x) \ .$$

Hvis vi i stedet har

$$f(x) = x^4 + \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

så er

$$F(x) = \int x^4 + \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + \ln(x) + k, \qquad x > 0 \ .$$

Igen tjekker vi efter med integrationsprøven

$$F'(x) = \left(\frac{1}{5}x^5 + \ln(x) + k\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5x^{5-1} + \frac{1}{x} + 0 = x^4 + \frac{1}{x} = f(x)$$

Bestem en stamfunktion gennem et punkt

Ovenfor har vi brugt det ubestemte integral til at finde alle stamfunktioner til en funktion. I visse tilfælde kan det være nyttigt at finde en bestemt stamfunktion.

En opgave kunne f.eks. lyde:

$$f(x) = 6x^2 + 4x$$

Find den stamfunktion til f, der går igennem punktet (-1, 3).

Først finder vi alle stamfunktionerne, og bagefter bestemmer vi k ud fra vores startbetingelse.

$$F(x) = \int 6x^2 + 4x \, \mathrm{d}x = 2x^3 + 2x^2 + k$$

(Du kan selv tjekke efter med integrationsprøven, at dette er rigtigt).

Nu ønsker vi at finde ud af hvilken af disse stamfunktioner, der går gennem (-1, 3). Vi sætter -1 ind på x's plads og 3 på stamfunktionsværdiens plads.

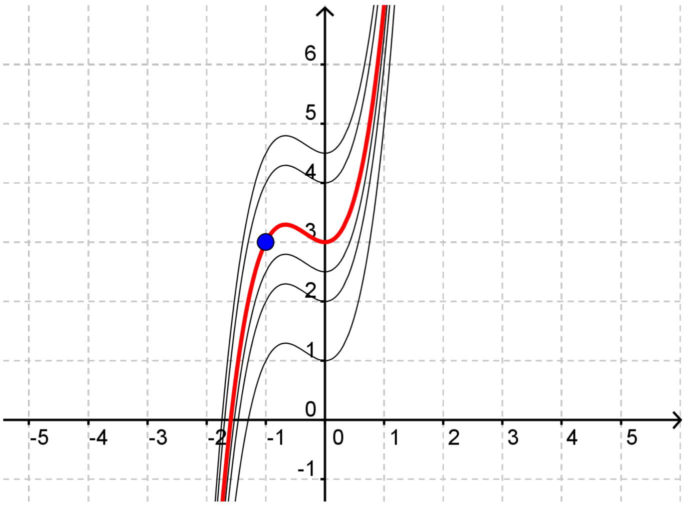
$$\begin{aligned} F(-1) &= 3 \\ 2 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + k &= 3 \\ -2 + 2 + k &= 3 \\ k &= 3 \end{aligned}$$

Den stamfunktion vi leder efter har altså $k = 3$. Derfor er svaret på opgaven

$$F(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3$$

Nedenfor er indtegnet forskellige stamfunktioner til f.

Kun én af dem går igennem (-1, 3).



6.4 Integrerede funktioner

Nedenfor er en liste over, hvordan man integrerer forskellige funktioner. Det er underforstået, at man skal huske at lægge en konstant til stamfunktionerne. Man kan tjekke dem alle sammen efter vha. integrationsprøven.

$f(x)$	$F(x)$
x	$\frac{1}{2}x^2$
kx	$\frac{k}{2}x^2$
k	kx
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{1}{k} \cdot e^{kx}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3$
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$

6.5 Regneregler for integraler

Ligesom med differentialregningen findes der også regneregler for, hvordan man integrerer summer og differenser af funktioner samt hvordan, man integrerer produktet af en funktion og en konstant. Alle disse regler kan eftervises vha. integrationsprøven

Sumreglen

Den første regel er sumreglen

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Hvis man skal integrere summen af to funktioner, integrerer man hver funktion for sig og lægger bagefter sammen. Med andre ord: "integralet af en sum er summen af integralerne" F.eks. kunne man blive bedt om at integrere

$$x^2 + \frac{1}{x}$$

så siger reglen, at vi skal integrere de to funktioner hver for sig

$$\int x^2 + \frac{1}{x}\,dx = \int x^2\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= (\frac{1}{3}x^3 + k_1) + (\ln(|x|) + k_2)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \ln(|x|) + k$$

hvor vi har samlet integrationskonstanterne k_1 og k_2 i en samlet konstant k.

Differensreglen

Differensreglen minder meget om sumreglen. Eneste forskel er, at man her betragter differensen af to funktioner

$$\int f(x) - g(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Med ord siger vi, at "integralet af en differens er differensen af integralerne". F.eks. kunne man blive bedt om at integrere

$$2x - 14x^6$$

Vi integrerer hvert led for sig og trækker dem fra hinanden til sidst.

$$\int 2x - 14x^6\,dx = \int 2x\,dx - \int 14x^6\,dx$$

$$= (x^2 + k_1) - (2x^7 + k_2)$$

$$= x^2 - 2x^7 + k$$

hvor vi igen har samlet integrationskonstanterne k_1 og k_2 i en samlet konstant k.

Produkt af konstant og funktion

Hvis vi ønsker at integrere produktet af en konstant og en funktion, så lader vi bare konstanten stå og ganger den på integralet af funktionen.

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$$

Vi har allerede benyttet denne regel et par gange ovenfor, men lad os tage et eksempel på den alligevel. Hvis vi skal integrere

$$3 \cdot x^2$$

så lader vi konstanten stå og integrerer funktionen:

$$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx$$

$$= 3(\frac{1}{3}x^3 + k_1)$$

$$= x^3 + k$$

her har vi ladet ladet konstanten $3k_1$ blive integrationskonstanten k.

Der findes også regler for, hvordan man integrerer produktet af to funktioner samt sammensatte funktioner. Det lærer man mere om på universitetet, men en metode er integration ved substitution, som man også ser på matematik A.

6.6 Bestemt integral og areal

En af de vigtigste forskelle på det bestemte og det ubestemte integral er, at mens det ubestemte integral giver en funktion (nemlig stamfunktionen) så giver det bestemte integral et tal.

$$\int f(x)\,dx = \text{funktion}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{tal}$$

De to tal a og b kaldes integrationsgrænserne. Man udregner et bestemt integral på følgende måde

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Dette betyder, at man først finder en stamfunktion til f. Denne stamfunktion skriver man inde i kantede parenteser med de to integrationsgrænser til højre. Derefter sætter man den øvre integrationsgrænse (b) ind på x's plads, hvorefter man sætter den nedre integrationsgrænse (a) ind på x's plads og trækker fra.

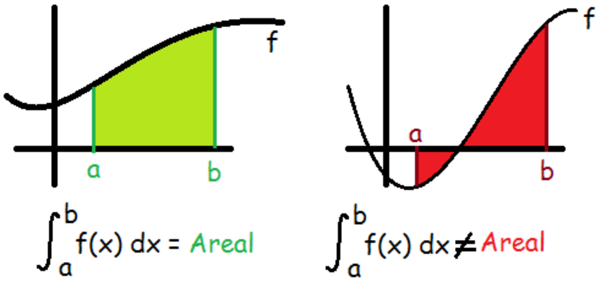
Et eksempel kunne være.

$$\int_0^2 \underbrace{6x^2}_{f(x)}\,dx = [\underbrace{2x^3}_{F(x)}]_0^2 = \underbrace{2 \cdot 2^3}_{F(b)} - \underbrace{2 \cdot 0^3}_{F(a)} = 16$$

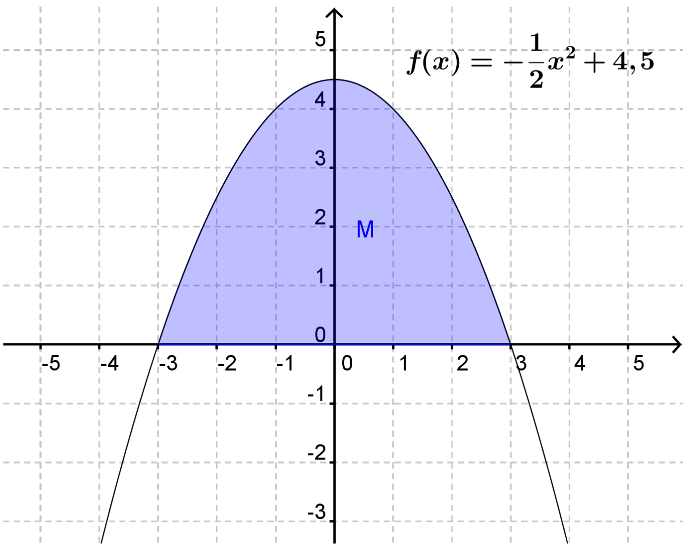
Bemærk, at vi bare fandt en tilfældig stamfunktion til f uden at tænke på at lægge en integrationskonstant til. Sådan er det altid med bestemte integraler.

Areal

Ovenfor sagde vi, at det bestemte integral giver et tal. Nogle gange er dette tal lig med arealet mellem funktionen f og x-aksen i intervallet [a;b]. Men det er ikke altid. Det er kun hvis f er positiv på hele intervallet [a;b]. Dvs. at grafen for f ligger ovenover x-aksen på hele intervallet.



Lad os tage et eksempel. Vi ønsker at finde arealet af figuren M på nedenstående tegning.



Vi kan se, at funktionen f er positiv (grafen ligger over x-aksen) på hele intervallet [-3;3].

Derfor vil det bestemte integral med integrationsgrænserne -3 og 3 give arealet af M.

$$Areal_M = \int_{-3}^{3} -\frac{1}{2}x^2 + 4,5\,dx = [-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^{2+1} + 4,5x]_{-3}^{3}$$

$$= [\frac{-1}{6}x^3 + 4,5x]_{-3}^{3} = \frac{-1}{6} \cdot 3^3 + 4,5 \cdot 3 - (\frac{-1}{6} \cdot (-3)^3 + 4,5 \cdot (-3))$$

$$= \frac{-27}{6} + 13,5 - (\frac{27}{6} - 13,5) = \frac{-54}{6} + 27 = -9 + 27 = 18$$

Arealet af M er altså 18.

6.7 Areal mellem to grafer

Hvis vi ønsker at finde arealet mellem to grafer, kan vi også bruge det bestemte integral. Det kræver, at den ene funktion har større funktionsværdier end den anden på hele intervallet [a;b]. Hvis f har større funktionsværdier end g, er arealet mellem de to funktioner givet ved

$$Areal_{fg} = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Bemærk, at det er ligegyldigt, om de to funktioner har positive eller negative funktionsværdier på intervallet, når bare f har større funktionsværdier end g.

Et eksempel kunne være, hvis vi ønskede at finde arealet af den punktmængde M, der er afgrænset af

$$f(x) = -0,5x^2 + 3x - 3$$

og

$$g(x) = x - 3$$

Først skal vi finde integrationsgrænserne a og b. Det er de punkter, hvor de to funktioners grafer skærer hinanden. Disse findes ved at sætte de to forskrifter lig hinanden.

$$f(x) = g(x)$$

$$-0,5x^2 + 3x - 3 = x - 3$$

$$-0,5x^2 + 2x = 0$$

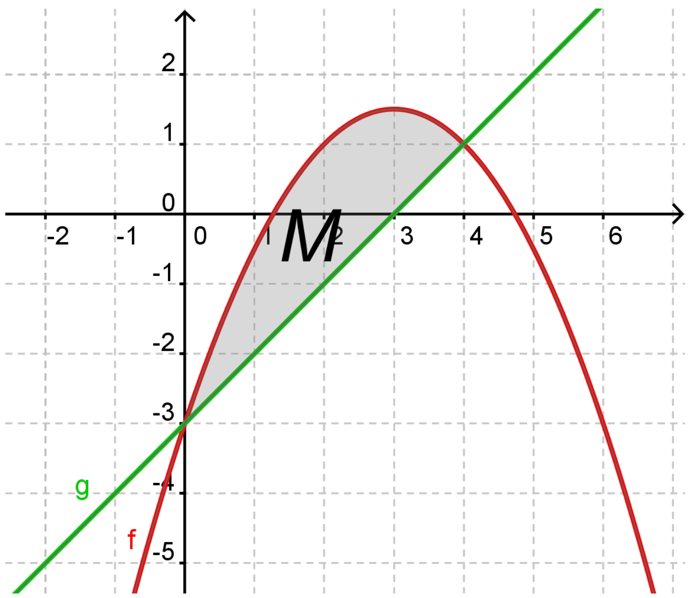
Dette er en andengradsligning, som vi løser ved nulreglen. Først sætter vi -0,5x uden for parentes.

$$-0,5x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \vee \; x = 4$$

Integrationsgrænserne må altså være a=0 og b=4.

Vi skitserer graferne for at finde ud af hvilken af funktionerne, der er størst på intervallet [0;4].



Vi kan se, at f har større funktionsværdier end g på hele intervallet [0;4].

Hvis vi ikke havde mulighed for at tegne graferne, så kunne vi have taget en vilkårlig x-værdi i intervallet og set hvilken funktionsværdi, der var størst. Mellem to skæringspunkter vil den ene nemlig være større end den anden i alle punkter, og derfor kan man frit vælge. F.eks.

$$f(2) = -0,5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 3 = -2 + 6 - 3 = 1$$

$$g(2) = 2 - 3 = -1$$

Nu ved vi hvilken funktion, der er størst, og vi kender integrationsgrænserne. Så er det bare med at komme i gang med selve integrationen.

$$A_M = \int_0^4 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^4 -0,5x^2 + 3x - 3 - (x-3)\,dx$$

$$= \int_0^4 -0,5x^2 + 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} + 2 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1}\right]_0^4$$

$$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2\right]_0^4 = \frac{-1}{6} \cdot 4^3 + 4^2 - \left(\frac{-1}{6} \cdot 0^3 + 0^2\right) = \frac{-64}{6} + 16 - 0$$

$$= 5,333...$$

7 Funktioner af to variable

7.1 Funktioner af to variable

Vi har allerede kigget meget på funktioner, hvor funktionsværdien kun afhænger af én variabel, typisk x. Altså $f(x)$.

Funktioner af to variable er ikke så meget anderledes end de funktioner af én variabel som du allerede har stiftet bekendtskab med i tidligere afsnit.

Forskellen er blot, at der i funktionen indgår to uafhængige variable. Funktionsværdien afhænger således af to parametre i stedet for blot en enkelt og det angives såldes: $f(x, y)$.

Et eksempel på dette kan være:

$f(x, y) = x - y + 10.$

Her afhænger funktionsværdien både af x og y.

Vi kan på sædvanlig vis evaluere vores funktion:

$f(0, 10) = 0 - 10 + 10 = 0,$

Eller

$f(1, 4) = 1 - 4 + 10 = 7.$

Lidt mere teknisk kan man sige at denne funktion tager et koordinatsæt fra $\mathbb{R}^2$ og afbilder dette over i $\mathbb{R}$.

7.2 Partielle afledede

Partielle afledede er en udvidelse af almindelig differentiation, der bliver brugt når man har at gøre med funktioner af flere variable. Det handler kort og godt om, at man på sædvanlig vis differentierer for én variabel, mens den anden variabel sættes som en konstant.

Alle regneregler for differentiation i én variabel $+, -, *, /$, sammensat funktion og invers funktion kan også benyttes ved partielle afledede.

Denne fremgangsmåde kan altså ikke bare anvendes til funktioner af to variable, men også til funktioner af flere variable.

Der er forskellig notation for de partielle afledede. Det kan f.eks. være

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) \quad \text{og}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y)$$

I den første af de to funktioner differentierer vi $f(x, y)$ i forhold til x. Altså anser vi blot y som en konstant i funktionen.

Eksempel

Vi kigger på ligningen: $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Hvis man ser y som en konstant, så er den partielle afledede ift. x $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$

Hvis man i stedet ser x som en konstant, så er den partielle aflede ift. y $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$

7.3 Gradient

Når man arbejder med funktioner af flere variable, kan man finde det der hedder gradienten af funktionen. Gradienten er en vektor, der fortæller hvilken retning funktionen vokser mest i et givet punkt, og hvor meget funktionen vokser i den retning. Gradienten af en funktion $f(x, y)$ skrives $\nabla f(x, y)$, hvor ∇ kaldes *nabla-operatoren*, og betegner i to dimensioner vektoren:

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Symbolet $\equiv$ betyder, at noget er defineret på denne måde. For eksempel er nabla defineret som ovenfor. Når vi tager gradienten af vores funktion $f(x,y)$ får vi altså:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$$

Det første koordinat er funktionen partielt afledt med hensyn til x, og det andet koordinat er funktionen partielt afledt med hensyn til y. Nabla-operatoren findes også i flere dimensioner, for eksempel (x,y,z):

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Men i denne gennemgang holder vi os til to dimensioner. Gradienten i et bestemt punkt, (x_0, y_0) er altså givet ved:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0), \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)\right)$$

Den vektor vi får ud, kaldes gradientvektoren, og vil pege i den retning funktionen vokser mest, og størrelsen af den vil vise, hvor meget funktionen vokser, som nævnt tidligere.

Lad os tage et eksempel. Vi ser på funktionen:

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y + 7$$

Vi ønsker nu at bestemme gradientvektoren i punktet (5,2). Til at starte med finder vi gradienten af funktionen. For at finde denne, skal funktionen partielt differentieres, både med hensyn til x og y:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + 4y + 7) = 2x + 3y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + 4y + 7) = 3x + 4$$

De to partielt afledte funktioner er nu de to koordinater i gradienten:

$$\nabla f(x,y) = (2x + 3y, 3x + 4)$$

For at finde gradientvektoren i punktet (5,2), skal vi nu bare indsætte værdierne $x = 5$ og $y = 2$ i gradienten:

$$\nabla f(5,2) = (2 \cdot 5 + 3 \cdot 2, 3 \cdot 5 + 4) = (16, 19)$$

Og så har vi altså vores gradientvektor for funktionen i punktet (5,2).

7.4 Stationære punkter

Stationære punkter for en funktion $f(x,y)$ er de punkter, hvor funktionens gradient er lig nulvektoren. Det betyder altså, at begge koordinater i gradienten skal være 0, dvs.:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0$$

Det er i de stationære punkter vi kan finde de såkaldte ekstrema, altså lokale minimum og maksimum. Vi kan også finde det der kaldes et saddelpunkt, som vil blive beskrevet senere.

Hvis vi for eksempel ser på funktionen $f(x, y) = 3x^3 + 4y^3 + 6xy^2 - 9x^2$. De partielt afledede er:

$$f_x(x, y) = 9x^2 + 6y^2 - 18x \quad \text{og} \quad f_y(x, y) = 12y^2 + 12xy$$

Vi starter med at se på den y-afledede. Vi sætter et y udenfor parentesen, og bruger nulreglen til at bestemme to mulige værdier for y:

$$12y^2 + 12xy = 0 \Leftrightarrow 12y(y + x) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = -x$$

Nu løser vi ligningen for den x-afledede i hvert af de to tilfælde, først $y = 0$:

$$y = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 6y^2 - 18x = 9x^2 - 18x = 9x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Og nu y= -x:

$$y = -x \Leftrightarrow 9x^2 + 6x^2 - 18x = 15x^2 - 18x = x(15x - 18) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}, y = -\frac{6}{5}$$

Vi har nu fundet tre stationære punkter. For $y = 0$ har vi mulighederne $x = 0$ og $x = 2$. For $y =$ -x har vi muligheden $x = \frac{6}{5}$, $y = -\frac{6}{5}$. Vores tre punkter er derfor:

$$(0, 0), (2, 0) \quad \text{og} \quad \left(\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}\right)$$

Arten af et stationært punkt

De stationære punkter vi har fundet, kan enten være minima, maksima eller saddelpunkter. For at bestemme det stationære punkts art, må vi indføre matrixregning. En matrix kan ses lidt som en vektor, som både har flere rækker og søjler. Vi starter med at indføre følgende forkortelser for de andenafledede funktioner:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = f_{xx} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = f_{yy} \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = f_{xy}$$

I udtrykket for funktionen afledt både med hensyn til y og x kan man se, at det er ligegyldigt hvilken rækkefølge man differentierer i, det giver det samme. Dette gælder altid, og kaldes Youngs sætning. Når man har de tre størrelser, sættes de sammen til det, der kaldes Hesse-matricen:

$$Hf \equiv \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Når man har fundet alle elementerne til Hesse-matricen og opstillet den, skal man løse det, der kaldes en *egenværdiligning* eller *determinantligning*. Helt generelt finder man determinanten af en 2x2-matrix på følgende måde:

$$\left| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right| = a \cdot d - b \cdot c$$

De lodrette streger omkring matricen angiver, at det er determinanten. I en egenværdiligning trækker man nu en værdi, som vi kan kalde z, fra i diagonalen, og sætter determinanten af den nye matrix lig 0. I praksis gøres det sådan:

$$\left| \begin{pmatrix} a - z & c \\ b & d - z \end{pmatrix} \right| = (a - z) \cdot (d - z) - b \cdot c = 0$$

Og vi ønsker så at finde løsningerne for z. Hvis vi vender tilbage til vores Hesse-matrice ser det således ud:

$$\left|\begin{pmatrix} f_{xx}-z & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}-z \end{pmatrix}\right| = (f_{xx}-z)\cdot(f_{yy}-z) - f_{xy}\cdot f_{xy} = 0$$

For at bestemme arten af et stationært punkt, skal vi indsætte punktets koordinater, og løse ligningen for z_1 og z_2. Fortegnet på z_1 og z_2 bestemmer nu arten efter reglerne:

Fortegn	Art
z_1 og z_2 er begge positive	f har lokalt minimum i (x_0, y_0)
z_1 og z_2 er begge negative	f har lokalt maksimum i (x_0, y_0)
z_1 og z_2 har forskelligt fortegn	f har hverken lokalt minimum eller maksimum i (x_0, y_0), det er et saddelpunkt
Enten $z_1 = 0$ eller $z_2 = 0$	Ingen konklusion

Eksempel

Hvis vi går tilbage til eksemplet fra før, med funktionen $f(x, y) = 3x^3 + 4y^3 + 6xy^2 - 9x^2$, kan vi nu finde de andenafledede, og opstille Hesse-matricen:

$$f_{xx} = 18x - 18 \quad f_{yy} = 24y + 12x \quad f_{xy} = 12y$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 18x-18 & 12y \\ 12y & 24y+12x \end{pmatrix}$$

Hvis vi starter med punktet (0,0):

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -18-z & 0 \\ 0 & 0-z \end{pmatrix}\right| = -z(-18-z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = -18, z_2 = 0$$

Siden $z_2 = 0$ kan vi desværre ikke sige noget om punktets art. Vi kan prøve med punktet (2,0):

$$Hf(2,0) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 18-z & 0 \\ 0 & 24-z \end{pmatrix}\right| = (18-z)(24-z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = 18, z_2 = 24$$

Nu har vi to positive værdier af z, og derfor kan vi konkludere, at funktionen har et lokalt minimum i (2,0).

Alternativ metode til at bestemme arten af et stationært punkt

Der findes en alternativ måde at bestemme arten af et stationært punkt. Vi kan kalde vores andenafledede funktioner i punktet (x_0, y_0), som vi ønsker at undersøge, for:

$$r = f_{xx}(x_0, y_0),$$

$$s = f_{xy}(x_0, y_0),$$

$$t = f_{yy}(x_0, y_0).$$

Så kan man se på udtrykket $r \cdot t - s^2$ og r, og ud fra dette afgøre arten af det stationære punkt:

- Hvis $r \cdot t - s^2 > 0$ og $r > 0$: Funktionen har lokalt minimum i (x_0, y_0).
- Hvis $r \cdot t - s^2 > 0$ og $r < 0$: Funktionen har lokalt maximum i (x_0, y_0).
- Hvis $r \cdot t - s^2 < 0$: Funktionen har et saddelpunkt i (x_0, y_0).
- Hvis $r \cdot t - s^2 = 0$: Ingen konklusion.

7.5 Tangentplan

Ligesom man kan finde tangentplanen til et bestemt punkt på en kugle, kan man også finde en tangentplan for en funktion af to variable. Det er den plan, der kun rører funktionen lige præcis i ét punkt, omkring der hvor vi finder planen - ligesom en tangentlinje til en funktion af én variabel. For en kugle kan man sige med sikkerhed, at tangentplanen kun rører et eneste punkt, fordi alle punkter på kuglen kan ses som lokale maxima. Men når det kommer til funktioner af flere variable, så kan det godt være, at planen skærer kurven igen et andet sted, ligesom med en tangentlinje.

Den generelle ligning for tangentplanen til en funktion $f(x, y)$ i et punkt (x_0, y_0) er givet ved:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Hvor $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ angiver den partielt afledede i forhold til x i punktet (x_0, y_0). Vi skal altså kende vores funktion, samt vores punkt vi ønsker at bestemme tangentplanen i. Dette punkt skal ligge på kurven for $f(x, y)$.

Eksempel

Lad os se på funktionen $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 3y + 1$, og finde tangentplanen i punktet $(3, 5, f(3, 5))$. Det første vi gør er, at bestemme funktionens værdi i (3,5):

$$f(3, 5) = 2 \cdot 3^2 + 5^2 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 1 = 18 + 25 - 12 - 15 + 1 = 17$$

Nu bestemmer vi de partielt afledede og evaluerer dem i punktet (3,5):

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 4x - 4$$

$$f_x(3, 5) = 4 \cdot 3 - 4 = 8$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y - 3$$

$$f_y(3, 5) = 2 \cdot 5 - 3 = 7$$

De fundne værdier kan nu indsættes i udtrykket for tangentplanens ligning:

$$z = 17 + 8(x - 3) + 7(y - 5) = 8x + 7y - 42$$

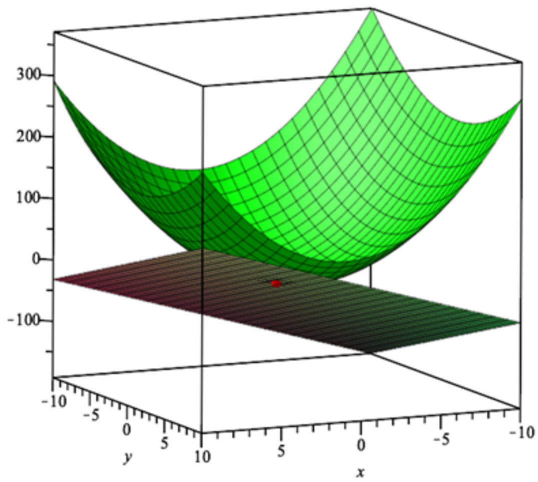
Omformer vi lidt får vi tangentplanens ligning i punktet $(3, 5, 17)$:

$$8x + 7y - z = 42$$

Det er altså ligningen for den plan, der lige rører vores funktion i det bestemte punkt. Ud fra denne ligning kan vi aflæse en normalvektor til planen fra koefficienterne:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nedenfor ses et plot af funktionen (den buede, grønne kurve), tangentplanen og punktet hvor de skærer hinanden:



I videoen kan du se, hvordan plottet er blevet lavet, og selv lære hvordan man plotter tangentplaner:

7.6 Niveaukurver

Du har sikkert set et kort over et landskab med mange højdeforskelle, hvor der var tegnet kurver ind, og måske endda farveforskelle. Disse kurver er det der kaldes niveaukurver, og fortæller hvilken højde man befinder sig i. Hvis man går langs en kurve, går man hele tiden i den samme højde, og man vil derfor ofte se noget der minder om cirkler rundt om bjerge på kortet. Til at beskrive kurver, der har højdeforskelle, bruger man funktioner af to variable. Man kan finde niveaukurver til funktionerne, der fortæller langs hvilke kurver funktionen har den samme værdi.

Hvis man har en funktion af to variable, $f(x, y)$, kan man finde niveaukurverne ved at sætte funktionen lig med en konstant, som vi kan kalde c. Vi kan således definere det, der kaldes *niveaumængden*:

$$K_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = c\}$$

Måden dette skal læses på er, at niveaumængden K_c indeholder alle de punkter (x, y), der er den del af det to-dimensionelle koordinatsystem ((x, y)-planen), hvorom det gælder at $f(x, y) = c$. Det er altså de punkter der opfylder at funktionens værdi er c.

Vi kan for eksempel se på funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13$. Hvis vi omformer den lidt, får vi noget vi kender:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$$

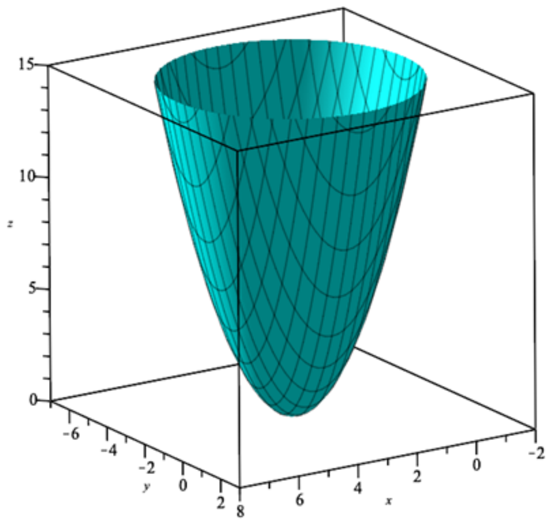
Sættes funktionen lig konstanten c får vi cirklens ligning, for en cirkel med centrum i (3,-2) og radius $\sqrt{c}$:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = c$$

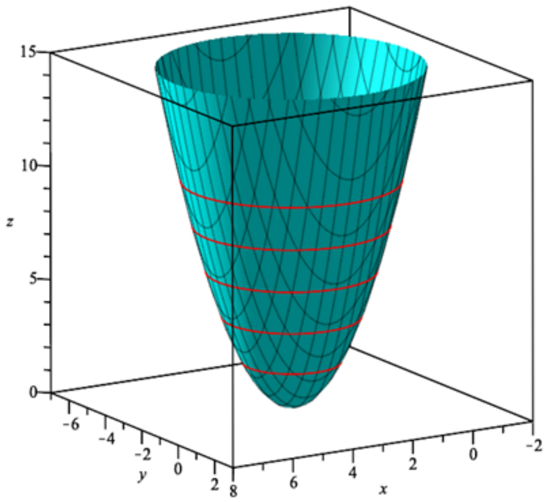
Da vi har to kvadrerede led på venstresiden, kan vores ligning ikke antage negative værdier. Den kan kun være positiv eller 0 i punktet (3,-2). Vi kan derfor opskrive vores niveaumængde i tre forskellige tilfælde:

$$K_c = \begin{cases} c < 0 & K_c \in \emptyset \\ c = 0 & K_c = \{(3,-2)\} \\ c > 0 & K_c = \text{cirkel med centrum i (3,-2) og radius}\sqrt{c} \end{cases}$$

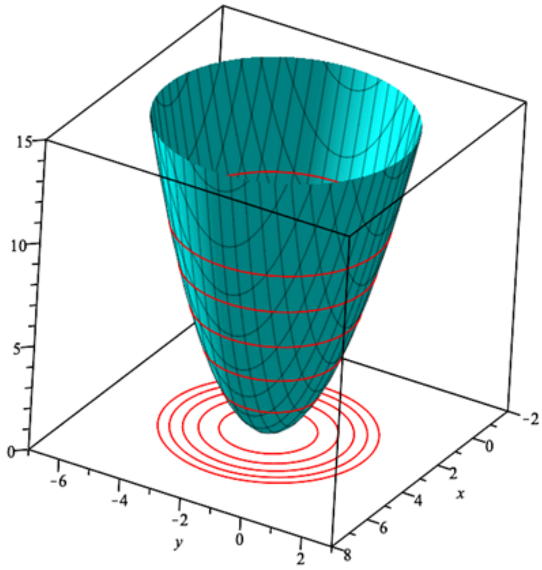
Her betyder Ø den tomme mængde, betydende at funktionen ikke har værdier mindre end 0 nogen steder. Det hele bliver lidt nemmere at forstå hvis man kan se det for sig. Vi kan starte med at plotte vores funktion $f(x,y)$, for at se hvordan den egentlig ser ud:



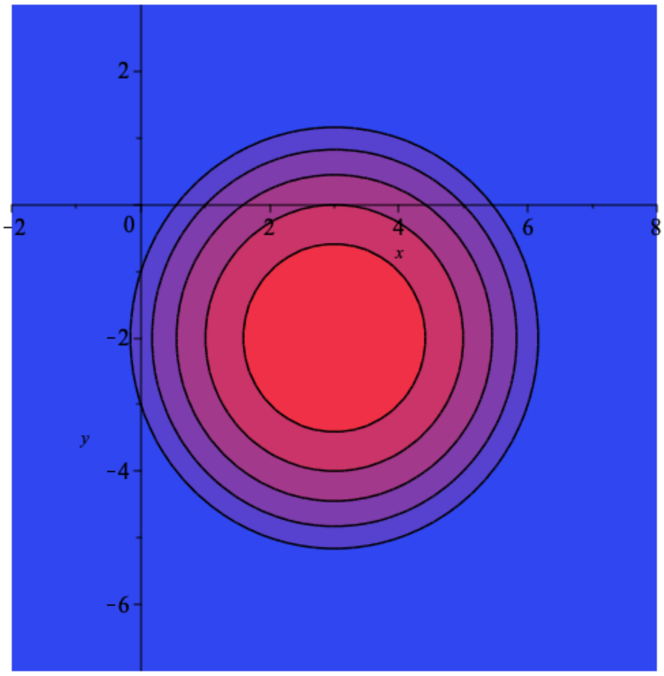
Vi kan se at funktionen har et minimum i (3,-2) med værdien 0. Derfor giver det mening, at der ikke er nogle niveaukurver tilhørende værdier mindre end 0. Vi kan også allerede nu se, at det giver mening, at funktionens niveaukurver vil være cirkler. Vi plotter nu figuren med nogle af dens niveaukurver, som farves røde:



Her er der plottet kurver i højderne 2, 4, 6, 8 og 10, men vi kunne have fortsat uendeligt højt op. Som vi forudsage har kurverne form som cirkler, der bliver større og større for større c. Nogle steder kaldes det vi har plottet her for *højdekurver*, og niveaukurverne er så højdekurverne projiceret ned i (x, y)-planet. Det kan ses her:



Cirklerne i planen angiver niveaukurverne, og det er en måde at afbilde noget tre-dimensionelt i det to-dimensionelle plan. Det er de kurver, man vil se på et landkort, der viser højder. Til sidst kan vi lave et konturplot, hvor de forskellige niveauer er blevet farvet, så man bedre kan visualisere højdeforskellene:



På det sidste plot er det også endnu tydeligere, at cirklerne alle har centrum i punktet (3,-2). Det kunne for eksempel være en afbildning af en bakke, som har sit toppunkt i (3,-2), og med en radius på lidt over 3.

I videoen nedenfor kan du se, hvordan alle plots i dette afsnit er lavet, og du kan selv lære at plotte niveaukurver, højdekurver og konturplots i Maple.

8 Statistik

8.1 Konfidensintervaller og frihedsgrader

8.1.1 Konfidensintervaller

Hvis vi ønsker at bestemme middelværdien for højden af alle gymnasieelever i Danmark, kan vi fx udvælge en 1.g-klasse i Københavnsområdet og beregne middelværdien for de studerendes højde i denne klasse.

Den beregnede middelværdi er så et estimat for middelværdien for højden for alle gymnasieelever i Danmark. Hvis vi nu vælger en anden klasse og igen beregner middelværdien, så får vi et andet estimat for middelværdien.

Dette estimat ligger sikkert tæt på den første beregnede middelværdi uden at være identisk med denne. Vi kalder det at udvælge en gymnasieklasse for tage en stikprøve ud af den samlede **population** bestående af samtlige gymnasieelever i Danmark.

Stikprøvens middelværdi kaldes også for et punktestimat for populationens middelværdi. Men hvis to forskellige stikprøver giver to forskellige estimater for middelværdien, hvordan kan vi så stole på estimatet? Hvad nu hvis vi i stedet for bare et enkelt punktestimat kunne bestemme et interval, som med stor sandsynlighed indeholder den rigtige ukendte middelværdi for hele populationen?

Et sådan interval kaldes også for et konfidensinterval. Et konfidensinterval er kendetegnet ved et niveau $1-\alpha$ og en typisk værdi for α er 5%, hvor man så taler om et $1-\alpha = 95\%$-konfidensinterval.

Formel

Hvis vi antager, at gymnasieelevers højde er normalfordelt med ukendt middelværdi μ og en kendt spredning på σ, så er formlen for et 95%-konfidensinterval

$$95\%\text{-konfidensinterval} = \left[\bar{x} - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

hvor

- $\bar{x}$ er stikprøvens middelværdi og
- n er stikprøvens størrelse.

Vi vender tilbage til konstanten 1,96.

Eksempel

Hvis vi antager at gymnasieelevers højde er tilnærmelsesvist normalfordelt med ukendt middelværdi μ og standard afvigelse på $\sigma = 10\text{cm}$, og vi har følgende stikprøve på 27 elevers højde (målt i cm)

$$175, 161, 177, 173, 179, 174, 173, 184, 184, 170, 169, 175, 175, 186,$$
$$169, 169, 176, 166, 181, 175, 179, 179, 183, 166, 179, 160, 170$$

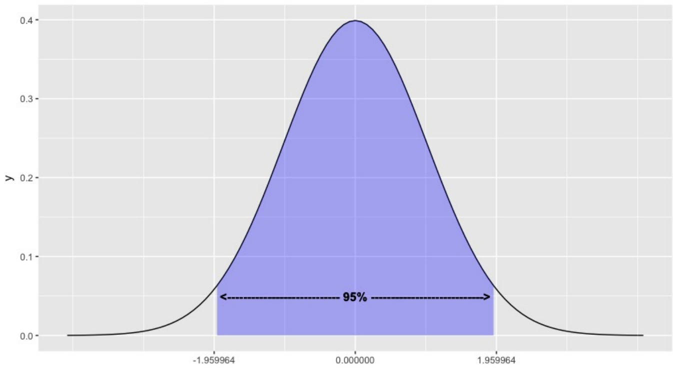
så kan vi beregne stikprøvens middelværdi til 174,33 og derfor er 95%-konfidensintervallet bestemt ved

$\left[174,33 - 1,96 \frac{10}{\sqrt{27}}; 174,33 + 1,96 \frac{10}{\sqrt{27}}\right]$

$$= \left[174,33 - 3,77; 174,33 + 3,77\right]$$
$$= \left[170,56; 178,10\right]$$

Konstanten 1,96

Hvor kom konstanten 1,96 fra som indgik i formlen for 95%-konfidensintervallet? Hvis vi kigger for fordelingsfunktionen for en normalfordeling med middelværdi 0 og varians 1, så er det samlede areal under kurven 1. Hvis vi derfor er interesseret i at finde det område under grafen, som dækker 95% af arealet, skal vi altså fjerne 2,5% af arealet i begge ender.



De $\pm 1,96$ svarer præcis til det område under kurven som giver en areal på 95%. Andre ofte anvendte konfidensintervaller er angivet i denne tabel.

Konfidensniveau	konstant
68%	1
90%	1,645
95%	1,96
99%	2,58

Hvis man skal regne fx et 90% konfidensinterval skal konstanten 1,96 erstattes med 1,645.

Får man brug for at bestemme andre konstanter kan man bruge Microsoft Office Excel til at udregne disse. Skal man bestemme et 92% konfidensinterval kan man finde konstanten med funktionen NORMSINV i Excel. Her skal man så udregne $1-\alpha = 0,92$ så $\alpha = 0,08$ og herefter indsætter man

$$\text{NORMSINV}\Big(1-\frac{0,08}{2}\Big) = 1,75$$

Bruger man den danske version af Excel, hedder funktionen STANDARD.NORM.INV. Matlab fra MathWorks har tilsvarende funktionalitet. Her bruger man funktionen norminv

$$\text{norminv}\big([0.04; 0.96], 0, 1\big),$$

hvor 0 angiver middelværdien og 1 variansen.

Konfidensinterval for binominalfordelinger

Ved en rundspørge på et gymnasie har 62 af 1.g. elever sagt, at de var tilfredse med introduktionsforløbet. 29 elever svarede, at de ikke var tilfredse.

Hvordan bestemmer man et 95%-konfidens-interval for andelen af tilfredse elever? Hvis X er antallet af elever som er tilfredse med introduktionsforløbet ud af en stikprøve på $62 + 29 = 91$, så er X binominalfordelt $X \sim b\big(n = 91, p\big)$

Vi har her en fast med ukendt sandsynlighed for at der bliver succes. Denne paramater kaldes sandsynlighedsparameteren og betegnes p. Sandsynlighedsparameteren kan estimeres til $\widehat{p}$

$$\widehat{p} = \frac{62}{91} = 0,68$$

Dette er en approksimation af $\widehat{p}$, der kun gælder når stikprøven er tilpas stor, og når p ikke er meget lille eller meget stor.

Formel

Formlen for et 95%-konfidens-interval i binominalfordelingen er

$$\left[\widehat{p}-1,96\sqrt{\frac{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{n}};\widehat{p}+1,96\sqrt{\frac{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{n}}\right]$$

Indsætter vi i denne formel findes konfidensintervallet

$$\left[0,68-1,96\sqrt{\frac{0,68\left(1-0,68\right)}{n}};0,68+1,96\sqrt{\frac{0,68\left(1-0,68\right)}{n}}\right]$$

$$=\left[0,58;0,78\right]$$

Altså vil tilfredsheden med introforløbet med 95% sikkerhed være mellem 58% og 78%.

8.1.2 Frihedsgrader

Hvad er en frihedsgrad?

Ordet frihedsgrad dækker over hver enkelt uafhængigt datapunkt, der kan variere og stadigvæk indgå i udregningen af en parameter. Frihedsgrader er nogle gange noteret med det græske bogstav ν (Ny), DOF (Degrees Of Freedom) eller bare *df*.

Frihedsgrader i en χ^2-test

I Tabel 1 nedenfor er givet en 2×2 tabel. En sådan 2×2 tabel vil have 1 frihedsgrad, da de forskellige observationer skal summere op til det totale antal observationer, her *n=20*.

	A_1	A_2	Total
B_1	?	5	5+?
B_2	5	5	10
Total	5+?	10	20

I de udvidede tilfælde med r rækker og k kolonner gælder at *df=(r-1)* $\times$ *(k-1)*. **NB:** I tilfældet med r rækker og *1* kolonne, gælder at *df=r-1*.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Total
B_1	?	?	5	15	10	40
B_2	?	?	0	20	5	40
Total	10	15	5	35	15	80

Tabel 2 vil have 4 frihedsgrader. Det forstås at man frit vil kunne variere indholdet af 4 celler, og resten vil så være låst i forhold til de bestemmelser, der gør sig gældende.

Frihedsgrader i en t-test

Hvis man har en talrække på n tal: $n_1, n_2, ...n_i$ vil man have $i-1$ frihedsgrader til at udregne gennemsnittet. Hvis man tester for gennemsnittet med 10 måleresultater vil man derfor have

$df = 10 - 9$frihedsgrader. Hvis man efterfølgende også estimerer variansen vil man have endnu en frihedsgrad mindre, da den første er brugt til at udregne gennemsnittet, som indgår i udregningen af varians. Dette er vigtigt at have in mente når man udregner konfidensintervaller hvor

$CI_\alpha = \bar{x} \pm t(\alpha, df) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$, hvor $t(\alpha, df)$ er din t-score på konfidensniveau α med df frihedsgrader.

8.2 Multipel regression

8.2.1 Multipel regression

Introduktion

Fra simpel lineær regressions analyse ved vi, hvordan man med mindste kvadraters metoden bestemmer den lineære funktion, som bedst passer til en række observationer i 2D planen.

Vi har altså her observationer (y_i, x_i) for $i = 1, \ldots, n$ og ønsker at bestemme konstanterne a og b på en sådan måde, at den lineære funktion $y = a + bx$ ligger så tæt på alle observationer (y_i, x_i) som muligt.

Verden er dog sjældent så simpelt indrettet, at man kan beskrive en *afhængig*variabel y med kun en enkelt *forklarende* variabel x.

Multipel regression er en udvidelse af simpel regression, hvor vi i stedet for en enkelt forklarende variabel har to eller flere forklarende variable. Forklarende variable kaldes til tider også for *kovarianter* mens afhængige variable somme tider omtales som *respons* variable.

Model

Vi har n observationer $y_i, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}$ hvor $i = 1, \ldots, n$ og ønsker at bestemme konstanter $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p$, så funktionen $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots b_px_p$ ligger så tæt på alle punkterne $y_i, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}$ som muligt. Konstanterne kaldes for regressionskoefficienterne.

Bemærk, at der nu er et dobbelt indeks på x'erne. Det er nødvendigt, da vi nu har p forklarende variable i stedet for blot en enkelt forklarende variabel. Så når vi skriver $x_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n \quad$ og $\quad j = 1, \ldots, p$ er der tale om den j'te forklarende variable for den i'te observation. Vi kan stille observationerne op i en tabel

Observation	Afhængig variabel	Forklarende variable			
	Y	X_1	X_2	$\cdots$	X_p
1	y_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1p}
2	y_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2p}
3	y_3	x_{31}	x_{32}	$\cdots$	x_{3p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
n	y_n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{np}

for på den måde at vise, at vi har p forklarende variable og n observationer.

Regressionskoefficienter bliver normalt fundet (estimeret) ved brug af mindste kvadrater metoden, hvor man vælger $b_0, b_1, \ldots, b_p$ således at udtrykket

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_0 - b_1x_{i1} - b_2x_{i2} - \cdots - b_px_{ip}\right)^2$$

minimeres. SSE er engelsk for Sum of Squares Errors. Dette er samme fremgangsmetode som kendes fra simpel lineær regression. b_0 kaldes for skæringen og de øvrige b'er kaldes hældninger.

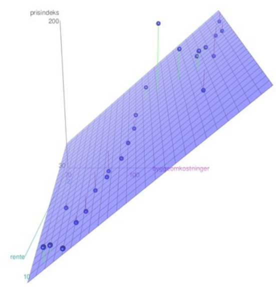
Formlen for koefficienterne $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p$ er noget mere kompliceret i det generelle tilfælde, så den springer vi over her. Men nedenfor gennemgår vi et eksempel på, hvordan man kan bestemme koefficienter ved brug af Microsoft Excel.

Residualer

Når vi har bestemt regressionskoefficienterne $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p$ så kan vi udregnede de *fittede* værdier for observationerne $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}$ hvor $i = 1, \ldots, n$. For den i'te observation er den fittede værdi $\widehat{y_i} = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \cdots b_p x_{ip}$ og vi definerer residualer som værende forskellen e_i mellem observationen y_i og den fittede værdi $\widehat{y_i}$ $e_i = y_i - \widehat{y_i}$ Bemærk at den før omtalte ligning for SSE også kan skrives $SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - b_2 x_{i2} - \cdots - b_p x_{ip}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \widehat{y_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2$ så når vi finder minimum for SSE, så minimerer vi residualerne eller med andre ord - forskellen mellem de observerede og fittede værdier.

Visualisering af løsningen

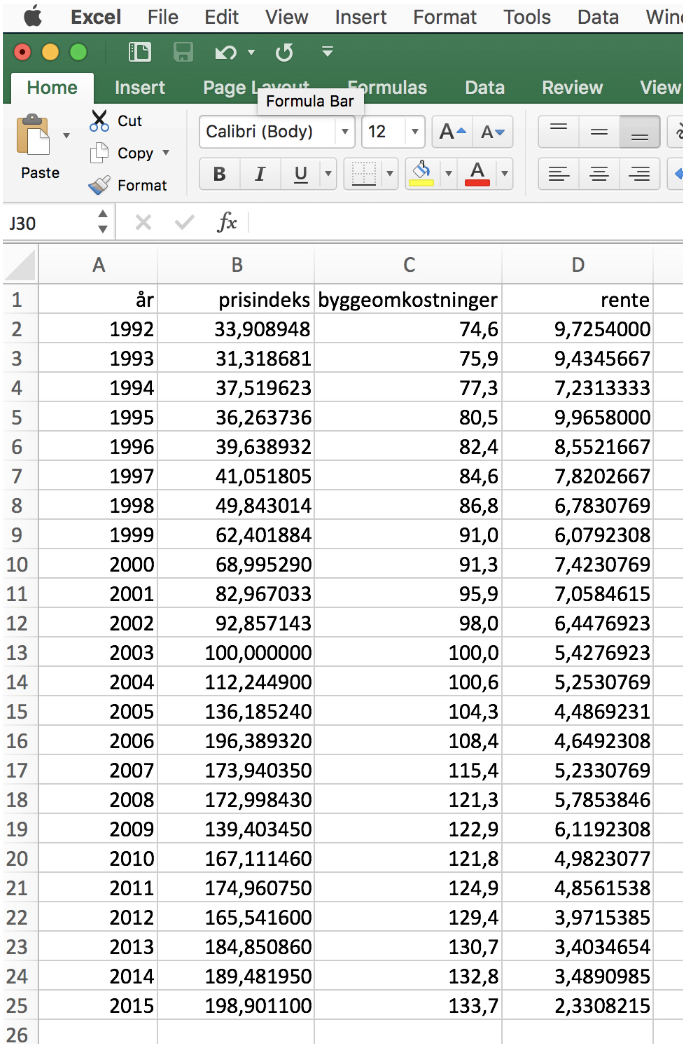
I tilfældet med simpel regression bestemmer vi en ret linje som passer bedst til observationerne. Det er umuligt at visualisere multipel regression i det generelle tilfælde. For det særlige tilfælde, hvor vi har to forklarende variable x_1 og x_2 og dermed modellen $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ så kan vi stadig visualisere løsningen. Vi kan tænke på observationerne $(x_{i1}, x_{i2}, y_i), i = 1, \ldots, n$ som punkter i rummet i 3D koordinatsystemet med akserne X_1, X_2 og Y.



Løsningen er nu ikke længere en ret linje, men derimod den plan som ligger tættest på alle punkterne. På figuren kan vi også se residualerne - de er plottet som linjer mellem observationerne og planen. Nogle observationer ligger over planen og er markeret med en grøn linje, mens andre observationer ligger under planen og er markeret med en rød linje. Det kan være svært ud fra en enkel vinkel at forestille sig, hvordan løsningen ud. Prøv at se på følgende optagelse, hvor vi kan se planen fra en række forskellige vinkler.

Eksempel

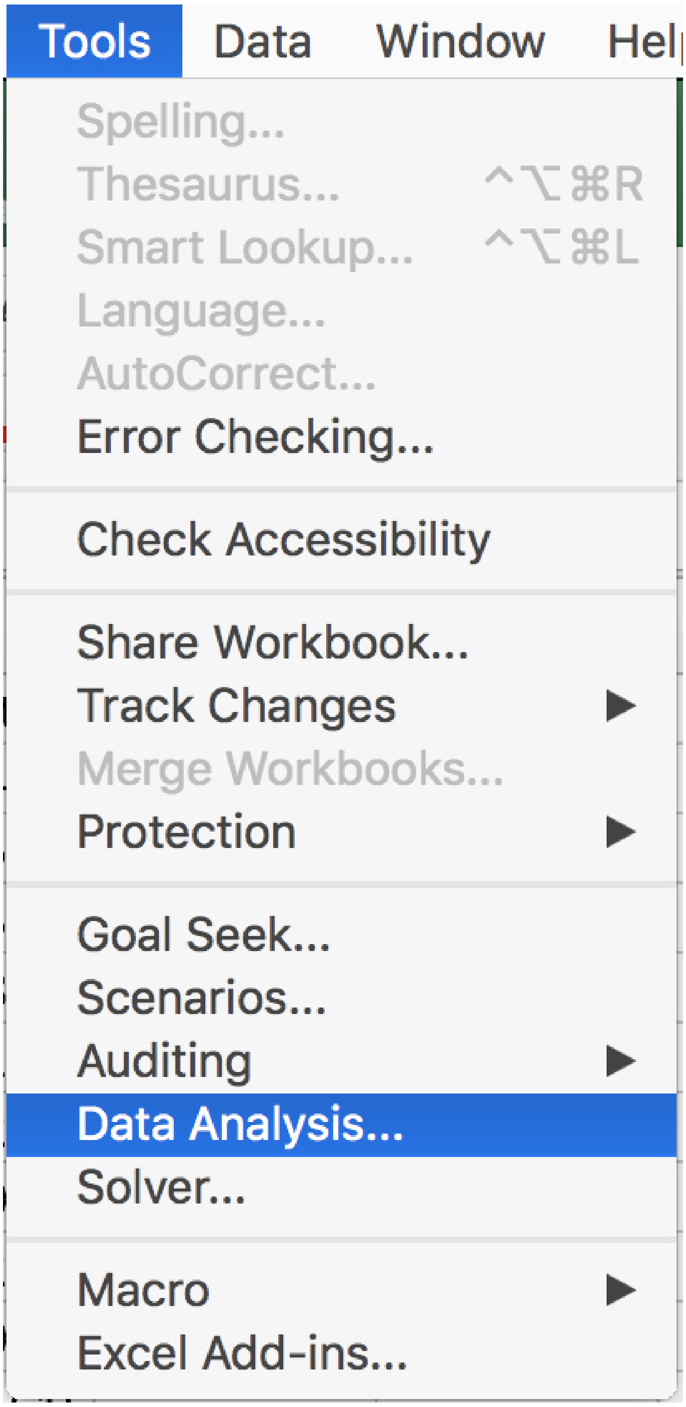
Lad os se på et (simplificeret) eksempel på multipel regressionsanalyse. Eksemplet er hentet fra opgaven Prisdannelse på ejerlejligheder i København af Vibeke Stål og Anne Melvej Stennevad. Forfatterne undersøger, om der er en lineær sammenhæng mellem prisen på ejerlejligheder i København og en række faktorer såsom fx rente og byggeomkostninger. $\text{prisindeks} = b_0 + b_1 * \text{byggeomkostninger} + b_2 * \text{rente}$ Hvordan bestemmer man regressionskoefficienterne b_0, b_1 og b_2, hvis vi har observationer som vist her i Excel



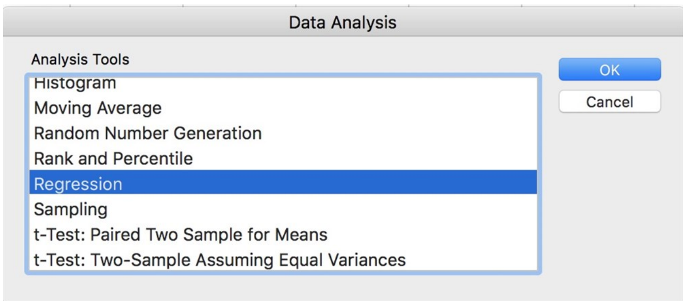
	A	B	C	D
1	år	prisindeks	byggeomkostninger	rente
2	1992	33,908948	74,6	9,7254000
3	1993	31,318681	75,9	9,4345667
4	1994	37,519623	77,3	7,2313333
5	1995	36,263736	80,5	9,9658000
6	1996	39,638932	82,4	8,5521667
7	1997	41,051805	84,6	7,8202667
8	1998	49,843014	86,8	6,7830769
9	1999	62,401884	91,0	6,0792308
10	2000	68,995290	91,3	7,4230769
11	2001	82,967033	95,9	7,0584615
12	2002	92,857143	98,0	6,4476923
13	2003	100,000000	100,0	5,4276923
14	2004	112,244900	100,6	5,2530769
15	2005	136,185240	104,3	4,4869231
16	2006	196,389320	108,4	4,6492308
17	2007	173,940350	115,4	5,2330769
18	2008	172,998430	121,3	5,7853846
19	2009	139,403450	122,9	6,1192308
20	2010	167,111460	121,8	4,9823077
21	2011	174,960750	124,9	4,8561538
22	2012	165,541600	129,4	3,9715385
23	2013	184,850860	130,7	3,4034654
24	2014	189,481950	132,8	3,4890985
25	2015	198,901100	133,7	2,3308215
26				

Hvis du selv ønsker at arbejde med dette datasæt, så kan det downloades via dette link.

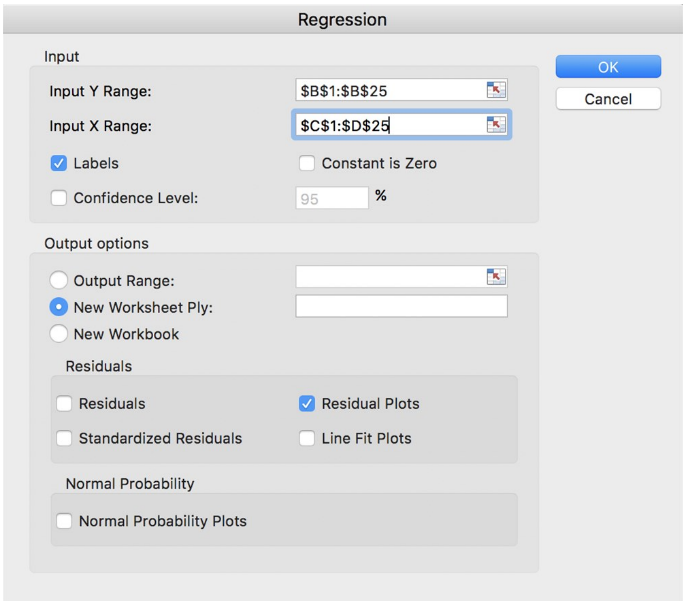
I menuen under "Tools" finder man "Data Analysis". Hvis Data Analysis ikke er en del af menuen, så er her en vejledning til hvordan man får den installeret i Excel.


Tools
Data
Window
Hel
Spelling...
Thesaurus... ^⌥⌘R
Smart Lookup... ^⌥⌘L
Language...
AutoCorrect...
Error Checking...
Check Accessibility
Share Workbook...
Track Changes
Merge Workbooks...
Protection
Goal Seek...
Scenarios...
Auditing
Data Analysis...
Solver...
Macro
Excel Add-ins...

og dernæst fås en oversigt over de forskellige analyseværktøjer. Vælg ”Regression”



Så dukker denne regression menu op



Her har vi som ”Input Y Range” valgt kolonnen med prisindeks (inkl. overskriften). Dette er vores afhængige variable. Dernæst har vi som ”Input X Range” valgt kolonnerne med data for byggeomkostninger og renter (igen inkl. overskrift). Ved at sætte kryds i ”Labels” checkboksen fortæller vi Excel, at vores valg af inputdata indeholder overskrifter. Det gør det nemmere at læse resultaterne. Som det sidste vælger vi også ”Residual Plots”.

Som udgangspunkt bliver alle resultater placeret i en nyt Excel sheet. Så er det lettere at slette dette sheet og begynde forfra, hvis man får behov for det.

Der er en masse output fra beregningen, men i første omgang fokuseres vi på regressionskoefficienterne

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*	*Lower 95,0%*	*Upper 95,0%*
Intercept	-90,952334	67,417593	-1,349089	0,191676	-231,154894	49,250225	-231,154894	49,250225
byggeomkostninger	2,354345	0,423834	5,554869	0,000016	1,472933	3,235757	1,472933	3,235757
rente	-6,673565	4,156066	-1,605741	0,123265	-15,316578	1,969448	-15,316578	1,969448

Indsætter vi de fundne koefficienter i vores model får vi regressionsligningen $\text{prisindeks} = -90,95 + 2,35 * \text{byggeomkostninger} - 6,67 * \text{rente}$

Efter at have bestemt selve modellen kigger vi på tallene under overskriften ”Regression Statistics”:

Regression Statistics	
Multiple R	0,95530458
R Square	0,91260683
Adjusted R Square	0,90428368
Standard Error	19,1838084
Observations	24

Her sætter vi fokus på Multiple R og R Square. På dansk kaldes disse to værdier for korrelations- og determinationskoefficienten.

8.2.2 Korrelationskoefficienten

Det er med Excel altid muligt at bestemme regressionskoefficienterne $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p$, så spørgsmålet er mere, om det giver mening at forsøge at modellere en lineær sammenhæng mellem en afhængig variabel og en eller flere forklarende variable. Det kan korrelationskoefficienten hjælpe os med at afklare. I Excel betegnes korrelationskoefficienten med "Multiple R". Men typisk bruger man blot betegnelsen R for korrelationskoefficienten.

Fortolkning af korrelationskoefficienten

Korrelation mellem to variable betyder, at hvis den ene variabel ændrer sig, så giver det en forudsigelig ændring i den anden variabel. Korrelationskoefficienten ligger altid mellem -1 og 1. En positiv korrelationskoefficient betyder, at når den uafhængige variable vokser, så vokser den afhængige variable også. En negativ korrelationskoefficient betyder, at hvis den uafhængige variabel vokser, så aftager den afhængige. Hvis den er -1 eller 1, er der en deterministisk korrelation mellem variablene, altså en ændring i den ene variabel vil helt sikkert medføre en ændring i den anden variabel. Hvis værdien derimod er 0, så er der absolut ingen lineær sammenhæng mellem de to variable. I gymnasiet kigger man i stedet ofte på den kvadrerede korrelationskoefficient R^2, kaldet forklaringsgraden. I tabellen kan du se fortolkninger af forskellige R^2-værdier:

R^2 værdi	Fortolkning
1,0	Perfekt lineær sammenhæng
0,9	Stærk lineær sammenhæng
0,5	Moderat lineær sammenhæng
0,2	Svag lineær sammenhæng
0,0	Absolut ingen sammenhæng

Bemærk at en høj grad af korrelation på ingen måder kan bruges til at postulere en årsagssammenhæng (kausalitet) mellem variable.

Hvis multipel lineær regression skal give mening, så *skal* der være en lineær sammenhæng mellem den afhængige variable og de forklarende variable. Hvis vi kigger på eksemplet fra tidligere, så ser vi, at der her er en korrelationskoefficient på ca. 0,9553 og at der dermed i dette tilfælde er en korrelation mellem variablerne pris, byggeomkostninger og rente.

Formel for korrelationskoefficienten for to uafhængige variable

Den generelle formel for korrelationskoefficienten er kompliceret og involverer matrixberegninger. I tilfældet hvor vi kun har to uafhængige variable er det lidt nemmere at skrive formlen ned. $R = \frac{\sqrt{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}}{\sqrt{1-r_{x_1x_2}^2}}$

hvor fx

$r_{yx_1} = (\frac{1}{n-1}) \sum \frac{(y-\bar{y})(x_1-\bar{x}_1)}{s_y \cdot s_{x_1}}$

og $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$, $\bar{x}_1 = \frac{\sum x_1}{n}$, $s_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i-\bar{y})^2}{n-1}}$, $s_{x_1} = \sqrt{\frac{\sum (x_1-\bar{x}_1)^2}{n-1}}$ Størrelsen r_{yx_1} er dybest set korrelationskoefficienten mellem variablerne y og x_1. Når formlen er mere kompleks skyldes det, at vi også er nødt til at betragte korrelationen mellem y og x_2 og mellem x_1 og x_2.

Pointen med at opskrive formlen er ikke, at du skal kunne regne korrelationskoefficienten i hånden. Pointen er derimod at kunne sammenligne med simpel regressionsanalyse. Hvis vi nu kun har en enkelt forklarende variable x_1 og $x_2 = 0$, så forsvinder de fleste led i formlen. Tilbage bliver kun de led, hvor x_2 ikke indgår, $R = \frac{\sqrt{r_{yx_1}^2}}{\sqrt{1}} = r_{yx_1}$ hvilket præcis er korrelationskoefficienten for simpel lineær regression mellem den afhængige variabel y og den forklarende variabel x_1.

8.2.3 Determinationskoefficienten

Determinationskoefficienten

I Excel hedder determinationskoefficienten "R Square", hvilket giver god mening, da formlen for determinationskoefficienten er kvadratet på korrelationskoefficienten, determinationskoefficienten $= R^2$ Man hører jævnligt alternative betegnelser for determinationskoefficienten som fx forklaringsgraden eller tilpasningsgraden.

Alternativ formel

Der findes en alternativ formel for R^2 - som naturligvis giver samme værdi. Det er lettest at beregne determinationskoefficienten som kvadratet på korrelationskoefficienten, men den alternative formel gør det nemmere at fortolke determinationskoefficienten.

Vi har tidligere set, at SSE er forskellen mellem de fittede og observerede værdier. På samme måde kan man definere SSR som værende forskellen på de fittede værdier og gennemsnittet af observationerne, $\text{SSR} = \sum_{i=1}^n \left(\hat{y_i} - \bar{y}\right)^2$ Definitionen på den totale "Sum of Squares" er $\text{SST} = \text{SSR} + \text{SSE}$

For observationerne y_i definerer man den totale "sum of squares" som $\text{SST} = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \bar{y}\right)^2$ hvor $\bar{y}$ er gennemsnittet af y_i'erne. Tilsvarende defineres "sum of squares" for regressions. Den alternative formel for R^2 er $R^2 = \frac{SSR}{SST}$

Fortolkning af Determinationskoefficienten

Vi har altså ligningen

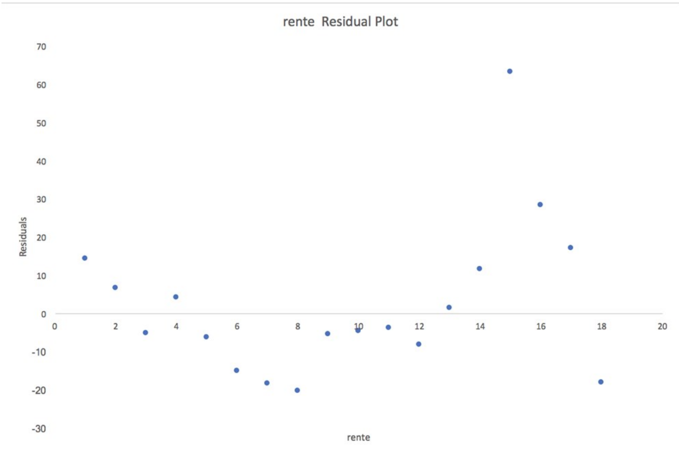
$$\begin{aligned} \text{SST} &= \text{SSR} + \text{SSE} \\ \text{Totale variation} &= \text{Forklaret variation} \\ &\quad + \text{Uforklaret variation} \end{aligned}$$

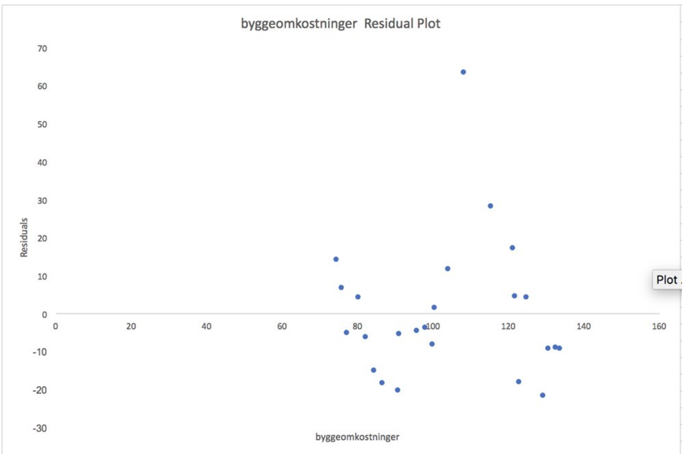
så formlen for R^2 er forholdet mellem den forklarede og totale variation i modellen. Så jo tættere

R^2 er på 1, desto mere variation er forklaret af modellen. Hvis R^2 kommer meget tæt på 1 eller ligefrem bliver 1, så er der dog grund til ekstra omtanke.

8.2.4 Residual plot

Det sidste output fra Excel som vi kigger nærmere på er residual plots. Husk, at vi i menuen sætter kryds ved "Residual Plots". Dette giver os disse to residual plots





Husk at residualerne er forskellen mellem de fittede og observerede værdier. Hvis residual plottene virker helt tilfældige, så giver den mening at bruge en lineær model. Kan man derimod spotte en trend i residual plottet, som fx en ret linje eller et polynomium, så giver det ikke mening med en lineær model. Begge ovenstående plots virker tilfældige, så i vores eksempel giver det mening at bruge en lineær model.

8.2.5 Kofidensintervaller for parametre

Konfidensinterval for parametre

Vi har tidligere behandlet konfidensintervaller for middelværdier og sandsynlighedparameteren. Man kan også bestemme konfidensintervaller for regressionskoefficienterne. Faktisk er de en del af output, når man bruger Excel til regressionsanalyse. Kig igen på tabellen som indeholdt regressionskoefficienterne. Der er nogle kolonner med overskriften "Lower 95%" og "Upper 95%". Tallene i disse kolonner er nedre og øvre grænse for et $100\% - 95\% = 5\%$ konfidensinterval omkring regressionskoefficienterne.

Det kan være lidt forvirrende, at kolonnerne "Lower 95%" og "Upper 95%" er gentaget to gange med samme værdier. Hvis du kigger på menuen i figuren her, kan du se, at man kan sætte kryds i "Confidence Level" og indtaste et konfidensniveau. Hvis man gør dette med fx 1% så får man kolonnerne "Lower 95%" og "Upper 95%" samt "Lower 99%" og "Upper 99%". Derfor får man som udgangspunkt altid 5% konfidensinterval med som resultat og derudover kan man få et ekstra interval efter eget valg.

Formel for konfidensinterval

Formel for $1-\alpha$ konfidensintervallet for de enkelte regressionskoefficienter er $b_i \pm t(v, 1-\alpha/2)\mathrm{se}(b_i)$
Her er

- t er t-test funktionen
- v er antallet af observationer minus antallet af regressionskoefficienter og
- $\mathrm{se}(b_i)$ er "standard error" for b_i

Størrelsen $\mathrm{se}(b_i)$ er svær at regne ud i hånden og formlen involvere matrix beregninger. Men kig igen på tabel for regressionskoefficienten. Faktisk er standardfejlen er del af output fra Excel. t-test funktionen er indbygget i Excel under navnet T.INV.2T.

Som eksempel kan vi regne et 90% konfidensinterval for b_1. Her er $v = 24 - 3 = 21$, $\alpha = 0,1$, $\mathrm{se}(b_i) = 0,42$ og $b_1 = 2,35$, så konfidensintervallet bliver

$$\begin{aligned}\Big[2,35 - \text{T.INV.2T(0,1;21)} * 0,42; 2,35 + \text{T.INV.2T(0,1;21)} * 0,42\Big] &= \\ \Big[2,35 - 1,72 * 0,42; 2,35 + 1,72 * 0,42\Big] &= \\ \Big[1,6276; 3,0724\Big]&\end{aligned}$$

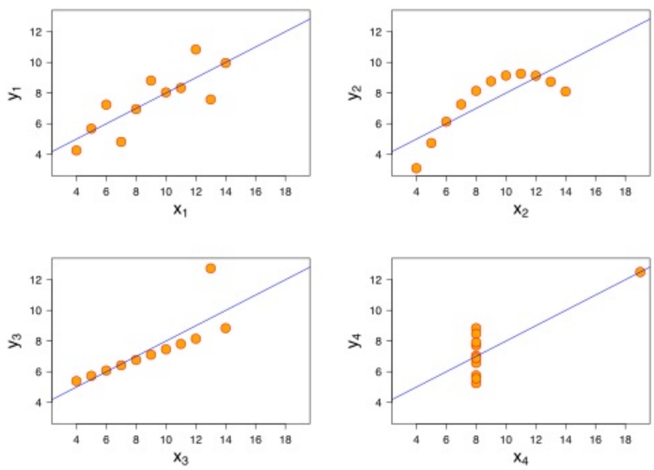
8.2.6 Avancerede emner

Disse emner falder udenfor pensum men for den nysgerrige er her en kort introduktion til emner, som er vigtige i forbindelse med regressionsanalyse.

Udforskende dataanalyse

Indenfor området data science arbejder man en del med udforskende dataanalyse. Dette indebærer, at man før man kaster sig hovedkuls ud i at vælge den ene eller anden model, så tager man sig tid til at undersøge data nærmere. Det giver fx ikke mening at bruge en lineær regressionsmodel, hvis man på en graf kan se, at der umuligt kan være en lineær sammenhæng mellem en afhængig variable og en forklarende variabel. Det er ikke helt nemt at afgøre, om der kan være en lineær sammenhæng mellem en afhængig variable og *flere* forklarende variable. Så på nuværende tidspunkt er det bedste man kan gøre, at undersøge om det er plausibelt, at der er en lineær sammenhæng mellem ens afhængige variabel og de forklarende variable en for en.

Der findes et klassisk eksempel under navnet Anscombes kvartet, hvor statistikeren Francis Anscombe viser fire forskellige datasæt med næsten identiske deskriptive statistikker (som fx middelværdi og varians), men når man laver en graf for hver af datasættene, så får man meget forskellige grafer.



Grafen er fra "Anscombe's quartet 3.svg. (2016, December 14). Wikimedia Commons, the free media repository", hvor den original fil findes her.

Model udvælgelse og multicollinearitet

Lad os sige, at vi har en model med en afhængig variabel og fire forklarende variable. $y = b_0 + b_1x_2 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4$ Hvordan kan vi være sikre på, at dette er den rigtige model. Måske skulle vi hellere udelade x_2 eller x_3 eller både x_2 og x_3. Sådanne spørgsmål forsøger man at besvare indenfor emnet model udvælgelse. Der findes en række statistiske tests, som kan være med til at afgøre, om det er en god ide eller ej at inkludere de enkelte variable.

Når man vælger de forklarende variable skal man også passe på med multicollinearitet. Derfor må ingen af de forklarende variable kunne skrives som lineære funktioner af de øvrige forklarende variable. I eksempel med fire forklarende variable kan vi fx ikke have at $x_2 = x_1 + x_4$

Justeret R^2

I forlængelse af forrige afsnit om model udvælgelse er det værd at bemærke følgende. Hvis vi tilføjer flere forklarende variable til vores model, så vil det stort set næsten altid være sådan, at værdien af R^2 bliver større. Betyder det, at det altid er godt at tilføje flere forklarende variable til ens model? Hvis vi har n observationer, så kan vi jo vælge en model med $n - 1$ forklarende variable. Dette vil ofte give en værdi af R^2 meget tæt på 1. Så må det jo være en god model! Svaret er nej. Derfor bruger man ofte ikke determinationskoefficienten R^2 men en værdi, som kaldes justeret R^2, når man skal se på om det giver mening at tilføje en ekstra variable til modellen.

Korrelation og kausalitet

Når vi arbejder med lineær regressionsanalyse, leder vi efter korrelationer mellem den afhængige variable og en række forklarende variable. Det er meget vigtigt at have for øje, at en lineær sammenhæng mellem en række variable ikke er ensbetydende med en kausalitet eller årsagssammenhæng mellem de samme variable. På videnskab.dk kan du finde en let tilgængelig artikel om korrelation og kausalitet og lære mere om forskellen samt hvad man skal passe på med.